ResearchGate

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: https://www.researchgate.net/publication/280886461

Unidades didácticas en Física y Matemática. Su contribución al desarrollo de competencias de pensamiento científico en la enseñanza media

Article · August 2014

CITATIONS
0

READS
788

1 author:

Mario Roberto Quintanilla Gatica
Pontificia Universidad Católica de Chile
60 PUBLICATIONS **351** CITATIONS

SEE PROFILE

All content following this page was uploaded by Mario Roberto Quintanilla Gatica on 12 August 2015.

The user has requested enhancement of the downloaded file.

Unidades Didácticas en Física y Matemática

Su Contribución al Desarrollo de Competencias de Pensamiento Científico en la Enseñanza Media

Volumen 9

Mario Quintanilla
Ismo Koponen
(Compiladores)

Pontificia Universidad Católica de Chile

Fondecyt
Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico

CONICYT
Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica

GRECIA
Laboratorio de Investigación en Didáctica de las Ciencias Experimentales

BellaTerra
Sociedad Chilena de Didáctica, Historia y Filosofía de la Ciencia

Academia de Ciencias de Finlandia

Unidades Didácticas en Física y Matemática

Su Contribución al Desarrollo de Competencias de Pensamiento Científico en la Enseñanza Media

---

Volumen 9

Mario Quintanilla - Ismo Koponen
(Compiladores)

Autores

Mario Quintanilla Gatica, Yadrán Gómez Martínez, Sebastián Urra Orellana, Gerardo Saffer Krause, Bianca de Quadros Cerbaro, Valderez Marina do Rosário Lima, João Batista Siqueira Harres, João Bernardes da Rocha Filho, Jorge Pinochet Iturriaga, Carla Hernández Silva, Manuel Ramírez Panatt, Patricio Farfán Vergara, Edelmira Badillo Jiménez, Pilar Peña Rincón, Francisco Rojas Sateler, Horacio Solar Bezmalinovic, Roberto Vidal Cortés, Jorge Neira Silva, Nelson Valenzuela Valenzuela

Pontificia Universidad Católica de Chile

CONICYT Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica

Fondecyt Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico

BellaTerra Sociedad Chilena de Didáctica, Historia y Filosofía de la Ciencia

Academia de Ciencias de Finlandia

GRECIA Laboratorio de Investigación en Didáctica de las Ciencias Experimentales

Unidades Didácticas en Física y Matemática

Su Contribución al Desarrollo
de Competencias de Pensamiento Científico
en la Enseñanza Media

Volumen 9

Producto científico derivado del Proyectos FONDECYT 1095149 (2011-2013),
patrocinado por la Comisión Nacional de Investigación Científica
y Tecnológica de Chile (CONICYT) y el Proyecto AKA-04 de Colaboración
Internacional con la Academia de Ciencias de Finlandia
y la Universidad de Helsinki

Santiago de Chile
2014

Director de la Colección: Mario Quintanilla Gatica
Laboratorio de Investigación en Didáctica
de las Ciencias Experimentales (Grecia). Sociedad Chilena
de Didáctica, Historia y Filosofía de la Ciencia

Compiladores del Volumen: Mario Quintanilla e Ismo Koponen
Evaluación de contenidos: Gerardo Saffer y Francisco Rojas

© GRECIA. Sociedad Chilena de Didáctica, Historia y Filosofía de la Ciencia

Pontificia Universidad Católica de Chile, Campus San Joaquín
Avda. Vicuña Mackenna 4860, Macul - Santiago de Chile.
Teléfono (56)-(2) 2686 5379
www.laboratoriogrecia.cl

1ª edición: Agosto de 2014
N° de Inscripción Propiedad Intelectual: 240.058
ISBN: 978-956-353-765-9
ISBN Obra Completa: 978-956-353-408-5

Editorial Bellaterra Ltda.

Edición al cuidado de Ricardo Rojas V. (*ricardorojaseditor@gmail.com*)

Corrección literaria: Néstor Bravo F. y Ricardo Rojas V.

Diseño de cubierta, texto y diagramación: María Eugenia Pino Q.

Impresión: ANDROS Impresores

Impreso en Santiago de Chile

Para fines comerciales, quedan rigurosamente prohibidas, bajo sanciones
establecidas en las leyes, la reproducción o almacenamiento total o parcial de la presente
publicación, incluyendo el diseño de la portada, así como la transmisión de ésta
por cualquier medio, tanto si es electrónico como químico, mecánico, óptico,
de grabación o bien fotocopia, sin la autorización escrita de los titulares del copyright.
Si necesita fotocopiar o escanear fragmentos de esta obra,
diríjase a: *www.laboratoriogrecia.cl*

Agradecimientos

Con profunda gratitud a los amigos y amigas investigadores, profesores y estudiantes de Brasil, Colombia, España y Chile que hicieron posible este libro. En particular, a los profesores Gerardo Saffer y Francisco Rojas quienes colaboraron en la ardua revisión literaria y de contenido. De igual manera a los profesores Franklin Manrique y Juan Espinoza que asumieron tareas específicas en momentos cruciales de la sistematización de la información.

Del mismo modo a Ricardo Rojas, María Eugenia Pino por su noble compromiso e infinita paciencia durante el tiempo de producción y edición final.

Finalmente, vaya nuestra gratitud y respeto para el Dr. Don Metz de la Facultad de Educación de la Universidad de Winnipeg, Canadá, quien tuvo la gentileza de acoger a uno de nosotros durante el invierno del 2013 y favorecer el avance y revisión de la producción y sistematización final del libro. Y, muy especialmente, al Proyecto de Colaboración conjunta CONICYT-AKA 04 del Gobierno de Chile, a la Academia de Ciencias de Finlandia y la Universidad de Helsinki, que colaboraron en la financiación de este texto que ahora entregamos a la comunidad.

MQ/IK

A la memoria de nuestras madres.

Índice

Presentación 11

Capítulo 1 15
Fisión Nuclear
Mario Quintanilla, Yadrán Gómez,
Patricio Farfán, Sebastián Urra

Capítulo 2 57
Las leyes de Kepler
Una Unidad Didáctica
desde la Naturaleza de la Ciencia
para la Enseñanza de la Física
Gerardo Saffer

Capítulo 3 85
Mecânica Aristotélica versus Galileana
Bianca de Quadros, Valderez Marina do Rosário Lima,
João Batista Siqueira, João Bernardes da Rocha Filho

Capítulo 4 105
Ondas Mecánicas
Una propuesta didáctica para favorecer
la argumentación y la explicación fenomenológica
del contexto del alumno
Carla Hernández, Manuel Ramírez, Patricio Farfán

Capítulo 5 123
Estática de los Fluidos
Una Unidad Didáctica para Educación Media
Jorge Pinochet

Capítulo 6 147
El concepto de triángulo a partir de un cuadro de Wassily Kandinsky
Relaciones entre arte y geometría para el desarrollo de competencias en alumnos en la transición primaria-secundaria
Edelmira Badillo

Capítulo 7 193
Resignificación del Algoritmo para Operar Aditivamente con Fracciones
Pilar Peña, Francisco Rojas

Capítulo 8 223
Relaciones y cambios: Interpretación, representación y tratamiento de la información
Horacio Solar

Capítulo 9 253
Introducción al concepto de Función y las Funciones Lineales
Roberto Vidal, Jorge Neira, Nelson Valenzuela

Autores de Física 289

Autores de Matemática 292

Presentación

Al comenzar la presentación de este libro, se evoca el tiempo trascurrido hace ya algunos años, cuando continuando con la línea de investigación de uno de nosotros surgió la idea de incorporar algunas experiencias de aula en el escenario de la investigación en enseñanza de las ciencias y formación de profesores de nuestro proyecto AKA-04 y de otros proyectos de colaboración en curso (Puente 21/23, CONICYT - COLCIENCIAS-*PCCI 130073*, entre otros). Se entrega así a la comunidad un producto más de los indicadores de productividad generados a luz de las directrices epistemológicas y metodológicas de los proyectos mencionados y que se materializa en una serie de Unidades Didácticas en Física y Matemática para la Enseñanza Media y Highschool, debidamente fundamentadas desde la investigación avanzada en didáctica de las ciencias experimentales y de las matemáticas que consideran el aula como el laboratorio privilegiado para la innovación y la renovación pedagógica, así como la formación y el desarrollo profesional, entre otros, del profesorado de esta área.

Su finalidad, por cierto, en relación a los proyectos mencionados, es contribuir a la promoción de competencias de pensamiento científico en la enseñanza secundaria. En el ánimo de valorar el trabajo de los académicos latinoamericanos y finlandeses que colaboran en este programa de investigación internacional, es nuestro deber destacar que los valiosos materiales contenidos en el libro trascienden la acción meramente instrumental u operativa, para convertirse en un valioso estímulo, aunque discreto e inacabado, para la reflexión y el estudio teórico del aprendizaje y enseñanza de la física y la matemática escolar.

Las Unidades Didácticas incluidas, recogen el espíritu permanente del Laboratorio GRECIA (www.laboratoriogrecia.cl) y abordan con originalidad, creatividad y discreción una temática de gran actualidad e importancia práctica (desarrollo y promoción de competencias de pensamiento científico). Se sitúan razonablemente en un terreno problemático y complejo donde, ciertamente, muchos aspectos teóricos deben ser aún esclarecidos e investigados en profundidad, pero que resulta de gran interés considerar, generando desafíos educativos para la

iniciativa, la innovación y, en suma, la actividad científica escolar de profesores y estudiantes, cuyo deseo ha de manifestarse siempre que interpretan el mundo desde el conocimiento que a diario demandan estas ciencias en el currículo.

Los temas que abordan las UD de este libro son variados, contextualizados a realidades locales y orientaciones teóricas diversas. Son objeto de atención de sus autores y autoras, aspectos muy diversos de la enseñanza de la física y la matemática, lo cual constituye buena parte de su riqueza investigativa y originalidad práctica. En cada uno de los capítulos se advierte y suma de manera natural, una coincidencia hacia la promoción de la actividad independiente de estudiantes y profesores; hacia la búsqueda reflexiva, la toma de conciencia y la elaboración autónoma de ideas, puntos de vista, materiales y recursos. La solución y re-solución de problemas en el aula de ciencias, se constituye así en el eje vertebrador de cada UD, con lo cual se genera, de manera sistemática y permanente el principal estímulo para el profesor; es decir, orientar al pensamiento científico del estudiantado, hacia niveles superiores competenciales tales como la argumentación, la justificación de las ideas y explicaciones de los sujetos que aprenden a interpretar el mundo con teoría mediante procesos cognitivos complejos y únicos.

Proporcionamos así a los docentes de física y matemática, mediante esta compilación, por cierto siempre incompleta y discutible desde la enseñanza de las ciencias, una propuesta educativa concebida como un apreciable intento de colaboración con la toma de Decisiones de Diseño Didáctico (DDD), orientando a cada docente en aspectos de naturaleza teórica y metodológica necesarios para contextualizar los modelos teóricos de la enseñanza y aprendizaje de la física y matemática. No se trata, en el sentido estrictamente lógico o 'tradicional' de la enseñanza dogmática de estas ciencias, de asumir pasivamente su contenido y transmitirlo al estudiantado, sino de enfocarlo con una buena dosis de creatividad, sensatez y buen criterio, realizando los ajustes pertinentes a las condiciones propias y las necesidades de cada aula en los contextos específicos en que se ha de direccionar la hermosa tarea de enseñar ciencia. De ahí la necesaria dosis de 'inteligencia creadora' que demanda su lectura, valoración e implementación en la diversidad de nuestras aulas, ávidas de 'nuevos lenguajes' que vinculan conocimiento, pensamiento y emoción por aprender a comprender el mundo con teoría científica.

Por último, quisiéramos enfatizar que el selecto grupo de personas que se han integrado y han dedicado su tiempo a la elaboración de estas propuestas, son personas sencillas, cuyas convicciones y talentos residen de manera natural en sus 'ethos' de especialistas, investigadores y profesores de diferentes universidades y países. Todos resaltan por el respetable conocimiento en sus disciplinas de

origen y afectos por los tópicos que se abordan en el libro. Por tanto, no queda menos que reconocer el hecho de que hayan aportado su esfuerzo y concitado voluntades para poner a nuestra disposición tan importante material educativo, que seguramente trascenderá en el tiempo y contribuirá humildemente a mejorar algunas dimensiones relevantes de la educación científica en general y de la enseñanza de la física en particular.

Dr. Mario Quintanilla Gatica
Dr. Ismo Koponen

Santiago de Chile, marzo de 2014

Capítulo 1

Fisión Nuclear

Mario Quintanilla Gatica, Yadrán Gómez Martínez ,
Patricio Farfán, Sebastián Urra Orellana

Contenido

• *Resumen*
• *La enseñanza de la Física Nuclear en el contexto escolar*
• *Justificación teórica de la U.D.*
• *Gestión de la U.D.*
• *El ciclo de aprendizaje constructivista para la U.D. de Fisión Nuclear*
• *Anexos*
- *Anexo 1: Síntesis de actividades y competencias de pensamiento científico (CPC), que promueve el tratamiento y metodología de enseñanza de esta U.D.*
- *Anexo 2: Ficha Metodológica de la U.D. para orientar al Docente*
- *Anexo 3: Guías Informativas*
- *Anexo 4: Modelo Cuántico del átomo de Bohr*
- *Anexo 5: Cuestionario*
• *Referencias Bibliográficas*

Resumen

Una propuesta educativa en el ámbito de la enseñanza de la física nuclear, aparece como una obvia necesidad frente a la realidad energética de nuestro país, donde nuestro gobierno estudia seriamente las posibilidades de la utilización de la energía nuclear como una fuente alternativa viable. Desde este punto de vista, un programa en aplicaciones didácticas en la enseñanza de los procesos de fisión nuclear, viene a transformarse también en una alternativa concreta ante los problemas de contextualización del trabajo científico (relación entre Ciencia-Técnica-Sociedad), y los componentes afectivos (compromiso por el aprendizaje, trabajo en equipo, clima de trabajo, importancia del trabajo personal en el logro de un objetivo concreto) de un adecuado proceso educativo, cuyos alcances se encuentran incluso fuera del ámbito escolar.

Este capítulo, tiene como objetivo principal el acercamiento y actualización del estudiantado de educación media, a la comprensión de la noción científica de fisión nuclear. Para la consecución del objetivo planteado se realiza una breve introducción sobre los distintos aportes eruditos vinculados con la construcción histórica de la noción científica de fisión nuclear, fundamentalmente a partir de los descubrimientos y reconstrucciones teóricas de los premios Nobel de Física. Asimismo, se revisan los principales planteamientos teóricos en materia educativa, destacando la orientación constructivista de enseñanza de las ciencias en este ámbito. A partir de la oportuna revisión bibliográfica y su posterior análisis, se ha elaborado un Diseño Didáctico de Física (D.D.F.), caracterizado por la evaluación y sistematización de las ideas previas de nuestros estudiantes y el desarrollo de actividades dirigidas, que contemplan la elaboración, recopilación y aplicación de diversos materiales pedagógicos, teóricamente fundamentados.

Las investigaciones didácticas realizadas en al ámbito de la radiactividad, estructura atómica y energía nuclear, nos muestran la gran cantidad de preconcepciones que poseen los y las estudiantes en el ámbito de la física. Dichas ideas previas en el área de educación en ciencias –tratadas en profundidad en el siguiente apartado– cobran vital importancia, en la construcción de un proceso de enseñanza-aprendizaje que resulte significativo en la comprensión de los conceptos que involucran las ciencias.

Considerando lo anterior, la propuesta de un D.D.F. en este ámbito del conocimiento viene a transformarse en una estrategia debidamente intencionada y orientada a la reflexión teórica y la autorregulación del aprendizaje, respetando las necesidades, ritmos y formas particulares de aprender de cada sujeto, lo que contribuye a potenciar las competencias de pensamiento científico.

En vista de este propósito, se ha desarrollado un conjunto de actividades de APRENDIZAJE Y EVALUACIÓN, orientadas a la comprensión de la noción de fisión nuclear, cuya metodología supera la simple sustitución de ideas, que caracteriza un clásico modelo de enseñanza-aprendizaje. Para este fin, se ha seleccionado un conjunto de recursos pedagógicos, debidamente contextualizados a la realidad educativa de nuestras aulas, pertinentes para el desarrollo de la UD que proponemos en este capítulo.

1.1 La enseñanza de la Física Nuclear en el contexto escolar

Con respecto al estudio acerca de la enseñanza de física nuclear, las investigaciones realizadas durante los últimos años, evidencian la necesidad de conocer las ideas previas de los estudiantes sobre los fenómenos naturales, para lograr un aprendizaje significativo de los conceptos que involucran las ciencias. Dentro de este ámbito, cobran especial importancia las ideas que el estudiantado posee al inicio del proceso de enseñanza, como las diversas situaciones que se han planteado para la gestión y evaluación del aprendizaje en el aula. Es importante mencionar, que la finalidad y la coherencia de una buena actividad de aprendizaje científico escolar (ACE), siempre se encuentra condicionada, sino determinada, por el ambiente planificado o emergente que se genera al interior del aula de clases, una situación claramente vinculada a la relación de los actores y autores del proceso educativo (estudiantes y profesores). Estas ideas a priori, se caracterizan por ser compartidas por la mayoría del estudiantado que lo desarrolla de distintas maneras, y del profesorado de ciencias que las aborda también indistintamente en el aula.

Al respecto, diversas investigaciones sobre el pensamiento de los jóvenes en relación a temas de física en general y de física nuclear en particular, sostienen que: las convenciones acerca de lo que determinadas sociedades interpretan sobre una dada situación física, influyen en el modo de percibirla. En relación a la enseñanza de la de radiactividad y energía nuclear, la investigación didáctica señala que, el estudiantado no es capaz de distinguir ni especificar los tipos de emisiones, pero si reconocen una liberación de energía, no obstante, en ningún caso asociada a un proceso de modificación de la estructura del átomo, producto del decaimiento radiactivo. En relación a los efectos de la radiación emitida, se piensa que se mantiene constante o que disminuye en el tiempo.

Indudablemente, la sociedad ha albergado desde hace algunos años, una idea desfavorable acerca de la utilización de la energía nuclear; las personas pertenezcan o no a un sistema formal de enseñanza, presentan un evidente rechazo hacia la utilización de este tipo de energía, destacando siempre los efectos nocivos de su aplicación (los contaminantes radiactivos, los efectos generados en situaciones como Chernobyl, su utilización bélica, entre otras), cerrándose con ello

las posibilidades que brinda su adecuada utilización a nuestra realidad como país, como una fuente energética alternativa y de investigación.

Innegablemente, el estudiantado posee conocimientos generales sobre las implicancias sociales de dichos temas, nociones que provendrían –en algunos de los casos–, de un contexto extraescolar, donde los medios de comunicación son fuente importante de construcción de ideas.

En una etapa previa en el estudio de la enseñanza de los procesos nucleares, las investigaciones didácticas han revelado que las ideas previas o preconceptos del estudiantado sobre la estructura de la materia, coinciden con los enunciados en la génesis de los conceptos, hecho que encuentra explicación en la gran difusión y fácil acceso a mayores y mejores fuentes de información (prensa, libros, televisión), sumado a la rápida incorporación de la tecnología informática al hogar. Por otra parte, existen otras opiniones un tanto pesimistas en torno a la comprensión del átomo; un ejemplo de ellas es la de Richard Feynman que sostiene: "el comportamiento atómico escapa a la comprensión de cualquiera, en tanto está muy alejado de los hechos cotidianos".

Otro hecho significativo y que constituye un preconcepto muy arraigado en la enseñanza de las ciencias, es la dificultad que presenta el estudiantado en la constitución universal de la materia por átomos, manifestando una diferenciación en la composición, dependiendo si se trata de un cuerpo vivo o inanimado. Con respecto a las dimensiones del átomo, los estudiantes no poseen una idea apropiada de ella.

Para Gutiérrez, Capuano y Vicente, 2000, esta situación puede ser causa de la acción de la instrucción, que en este caso no permite la realización de esquemas en escala, tal como ocurre en el caso del Sistema Solar. La existencia de la fuerza nuclear, no es un concepto discutido por los estudiantes, pero éstos(as) presentan una ambigua concepción sobre las características de dicha fuerza, que es rápidamente asociada a una fuerza de carácter magnética, por la idea de ser netamente atractiva.

1.2 Justificación teórica de la Unidad Didáctica

Los intentos por entender la estructura de la materia, se remontan a la antigua Grecia con Demócrito (aproximadamente 460-371 A.C.), filósofo griego autor de la primera teoría atómica. Él visualizaba el universo conformado por partículas primarias, indivisibles e invariables. Creía que estas partículas (átomos), se hallaban en movimiento constante, pero que podían unirse entre sí en combinaciones estables.

Posteriormente, el profesor de escuela, químico y físico inglés, John Dalton (1766-1844), propuso que la materia estaba hecha de pequeñísimas partículas indivisibles, los átomos. Sin embargo, una serie de investigaciones que comenzaron en la década de 1850 y se extendieron hasta el siglo XX, demostraron que los átomos en realidad poseen una estructura interna, es decir, están formados por partículas, aún más pequeñas, llamadas partículas sub-átomicas. Las investigaciones en este período condujeron al descubrimiento de tres partículas: electrones, protones y neutrones.

Mediante el bombardeo con partículas energéticas, se ha podido modificar la estructura de los núcleos. Estas interacciones o choques, que cambian la identidad del núcleo blanco, se conocen como reacciones nucleares. El experimento de Rutherford para la dispersión de partículas alfa, constituye el primer intento de observación de este tipo de reacciones.

Bajo la orientación constructivista, la aproximación de las actividades de aprendizaje y evaluación a la construcción de los conocimientos científicos escolares, tiene especial valor con el planteamiento de diversas orientaciones de enseñanza acorde a las características del razonamiento científico, basado en situaciones de aprendizaje abiertas, que respondan a los intereses del estudiantado. (XX)

Según Gil Pérez (xx), el aprendizaje de las ciencias es concebido así no como un simple cambio conceptual, sino como un cambio a la vez conceptual, metodológico y actitudinal.

Es por este motivo que, un programa en aplicaciones didácticas en la enseñanza de la noción de fisión nuclear, bajo una orientación constructivista del proceso de enseñanza-aprendizaje, se transforma en una respuesta concreta a las incesantes peticiones de actualización y efectividad, que contempla una participación efectiva de los estudiantes en la construcción de los conocimientos, dejando atrás los anquilosados procesos de simple reconstrucción o sustitución objetiva de los conocimientos proporcionados por los educadores o textos de asignatura, con el consecuente enfrentamiento de ideas previas y conceptos científicos que se busca incorporar en las estructuras cognoscitivas del estudiantado, con los consabidos conflictos afectivos que ello les genera.

1.3 Gestión de la Unidad Didáctica

Como una forma de abordar la Unidad Didáctica de la enseñanza de la física nuclear en el contexto escolar secundario (estudiantes entre 14 y 17 años), se consideran en la elaboración de la propuesta una serie de contenidos científicos conceptuales, procedimentales y actitudinales, sistematizados en la tabla Nº1. Como instancia de profundización, se incorpora a la propuesta didáctica, una serie

de orientaciones metodológicas para el trabajo docente (Anexo Nº1). Finalmente, en la tabla Nº2 se tipifican ideas para el diseño de la Unidad Didáctica de Física.

Tabla Nº 1

Contenidos científicos considerados en la gestión de la U.D.

Unidad: Física Nuclear		
Contenidos científicos relevantes	**Fisión Nuclear**	
	Objetivos específicos para la U.D.	• Desarrollar una descripción teórica actualizada del proceso de Fisión Nuclear, a través de la discusión y replanteamiento de diferentes ideas. • Estimular el trabajo experimental en los principales aspectos asociados al proceso de fisión nuclear. • Determinar algunos de los alcances de los descubrimientos en procesos nucleares en la actualidad, brindando una posibilidad de contextualización, mediante propuestas que relacionen ciencia, técnica y sociedad en el proceso de fisión nuclear. • Propiciar el desarrollo de competencias de pensamiento científico, como la *argumentación* y la *explicación* sobre la base de la observación de fenómenos científicos
	Conceptual	• El átomo "físico". • Los constituyentes atómicos (electrones, protones y neutrones) • Las fuerzas entre partículas. • Modelo atómico de Thomson. • Modelo atómico de Rutherford. • Modelo cuántico de Bohr. • Radiactividad Natural. • La fisión nuclear. • La reacción en cadena. • Beneficios y perjuicios de la energía nuclear.
	Procedimental	• Estimular la elaboración de explicaciones científicas escolares sobre los fenómenos de interés. • Saber discriminar los hechos relevantes en un texto científico. • Propiciar instancias que permitan modelar los principales temas de interés científico para la ciudadanía. • Proponer y desarrollar actividades experimentales. • Sistematizar los datos obtenidos mediante la elaboración de tablas y gráficos.
	Actitudinal y valórico	• Reconocer las limitaciones de nuestros sentidos, que se encuentran determinados por el entorno. • Comprender la construcción del conocimiento científico, como un proceso de producto del esfuerzo de los hombres y mujeres de ciencia, a lo largo de la historia.

		• Evidenciar las formas de obtención de energía, reconociendo sus limitaciones y ventajas en la utilización de la misma. • Crear conciencia de las distintas alternativas energéticas de que disponemos en la actualidad, destacando las de mínimo impacto en el medio ambiente.

Tabla Nº2

Ideas para el diseño de la UD de Fisión Nuclear

DECISIONES DE DISEÑO DE LA COMPONENTE DIDÁCTICA DE FISIÓN NUCLEAR	
¿Qué concepción de fisión nuclear debemos enseñar?	El decaimiento espontáneo corresponde a un proceso de transmutación de un elemento en otro. La fisión nuclear es un proceso donde se experimenta una división de los núcleos atómicos, con la liberación de una enorme cantidad de energía.
¿Para qué enseñar esas nociones?	Una noción del concepto de fisión nuclear, constituye una verdadera oportunidad de actualización de los anquilosados conceptos de nuestro sistema educativo, en una de las más próximas realidades de nuestro país, que estudia con real interés la incorporación de procesos relacionados con la escisión del núcleo, como una fuente alternativa concreta para nuestra realidad energética.
¿Para qué CPC asociadas a esa concepción de fisión nuclear?	Se favorece, la **EXPLICACIÓN** de un hecho experimental, con base en la evidencia empírica o definiciones parciales; la **INTERPRETACIÓN** de los resultados obtenidos en la instancia experimental; la **ARGUMENTACIÓN** basada en la modelización teórica de fenómenos. **RECREACIÓN** de los contenidos científicos. Se requiere manejo de información específica y elaboración teórica con base en "ideas impregnadas de atributos valóricos, culturales y conceptuales".
¿Cómo enseñar esa concepción de fisión para esos aprendizajes, con base en la Resolución de Problemas?	La discusión de una situación que sirva como instancia motivacional, cobra especial importancia en el desarrollo de esta unidad, donde por ejemplo, se puede enfatizar en el análisis de la energía nuclear como una alternativa para compensar los déficit de producción de energética eléctrica. Se vuelve importante una adecuada selección de las preguntas que favorezcan la reflexión, discusión, análisis, reconstrucción e interpretación de las temáticas de interés, que guarden coherencia con los CPC que se quiere promover ; donde la utilización de algún tipo de símil basado en experiencia de la vida cotidiana, se vuelve una buena herramienta para el acercamiento de los contenidos a los estudiantes. Dichas preguntas pueden ser orientadas, con la lectura de textos que motiven la discusión, junto con la realización de actividades experimentales que permitan el acercamiento al problema y la elaboración de explicaciones tentativas en forma grupal, donde el profesor encaminará a los estudiantes en la construcción progresiva de modelos teóricos, que van evolucionando en complejidad a lo largo del tiempo, producto del surgimiento de preguntas, comparaciones, metáforas y conocimientos científicos.

1.4 El ciclo de aprendizaje constructivista para la Unidad Didáctica de Fisión Nuclear

Para el logro de los objetivos planteados, la presente unidad didáctica contempla el desarrollo de una propuesta que estimula y facilita la comprensión de los conceptos asociados a la fisión nuclear, a través de la incorporación de las competencias de pensamiento científico (CPC) de real interés para el estudiantado. La tabla Nº3 sintetiza la finalidad teórica y orientación metodológica de la U.D.

Tabla Nº 3

Síntesis del ciclo de aprendizaje para la UD de Fisión Nuclear

Fase	Ciclo	Actividades
1	Exploración o de identificación de ideas previas.	1
2	Introducción de nuevos conocimientos	3
3	Sistematización o estructuración	4
4	Aplicación o transferencia	5
	Total actividades de gestión didáctica U.D.	**13**

1.4.1 Fase 1 o Fase de exploración o de identificación de ideas previas

En esta fase las/los estudiantes se enfrentan a un conjunto de instancias educativas de distinta naturaleza, cuyas finalidades parten por la evaluación de las preconcepciones de cada uno de las/los estudiantes, en relación a la fisión nuclear y los temas asociados. Las instancias educativas centran su quehacer en la prosecución de los CPC planteados para la presente unidad, incorporando actividades de carácter teórico y experimental que mantienen un nexo estrecho, con la utilización de herramientas informáticas presentes en la red y la utilización de recursos de fácil acceso, para cada uno de los docentes y educandos.

ACTIVIDAD 1
Fase de Exploración

Objetivo 1

Como principal objetivo de esta actividad inicial, se sugiere la realización de una dinámica de "lluvia de ideas" donde cada estudiante, organizados en grupos con los demás, deberá escribir uno o más conceptos asociados al proceso de fisión nuclear en una ficha. Posteriormente, cada grupo, en una cartulina, esquematizará los temas en estructura global, reconociendo los vínculos (indicados a través de flechas) presentes entre cada uno de los conceptos. Cada uno de los esquemas realizados por los estudiantes, deberá permanecer en un lugar visible de la sala, como una forma de poner

en evidencia las distinciones conceptuales, y sus nexos temáticos durante todo el desarrollo de la UDF.

Se sugiere que el profesor trabaje específicamente en esta actividad, la competencia explicativa.

1.4.2 Fase 2 o Fase de introducción de nuevos conocimientos:

A continuación se proponen una serie de instancias educativas, que se encuentran enfocadas en la construcción de los nuevos conocimientos. Dichas actividades realizadas por las/los estudiantes, vincularán las ideas previas de ellos/ellas en la incorporación de los nuevos temas de interés, estimulando el trabajo en equipo y la discusión. Como instancia inicial, se proponen las siguientes actividades.

ACTIVIDAD 2
Fase de Introducción a nuevos conocimientos

Objetivo 2

El objetivo principal de esta actividad es que el estudiantado, organizado en pequeños grupos, indague sobre la evolución que ha sufrido el concepto de materia a lo largo de la historia, desde sus orígenes en los griegos, hasta la visualización del átomo en el modelo de Erwin Schrödinger, para posteriormente, elaborar una estrategia de difusión y presentación de los temas investigados (Cómics, línea de tiempo, afiche, etc.).

Se sugiere al profesor que esta actividad se transforme en un debate o foro para discutir los nuevos conocimientos, con las ideas originales del curso a partir de la justificación y argumentación de sus estudiantes.

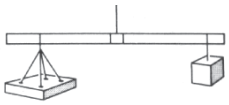
Actividad 3
Fase de Introducción a nuevos conocimientos

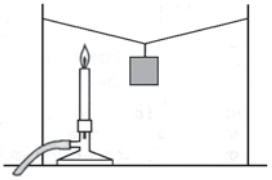
Objetivo 3

El objetivo principal de esta actividad es que el estudiantado, organizado grupalmente, discuta a partir de una actividad experimental, las características y el comportamiento de las partículas enunciadas en la teoría cinético-molecular de la materia, como también, la existencia de fuerzas que determinan el comportamiento de las partículas de distinta clase. Para ello se sugiere al profesor considerar los siguientes materiales para el éxito de la explicación experimental.

Materiales

- Un trozo cuadrado de vidrio de 3 cm de lado
- 1 pequeño listón de madera de 10 cm de largo
- Un plomo de masa equivalente a la del cuadrado de vidrio
- Un vaso de precipitado de 6 cm de diámetro
- Agua
- Cinta adhesiva
- Hilo
- Globos
- Grasa
- Bomba de bicicleta
- Recipiente sellado con entrada para la bomba
- Un resorte corto
- Un peso de plomo
- Soporte
- Tubos capilares
- Tinta





Una de las teorías más relevantes de la Física la constituye la teoría cinético-molecular de la materia, que destaca entre sus principios básicos el que la materia está constituida por pequeñísimas partículas, demasiado pequeñas para ser vistas a simple vista. ¿Por qué, entonces, se cree que existen? La razón es que si se aceptan estas ideas científicas, podemos explicar fenómenos como los que analizaremos a continuación:

a. Explica o justifica y/o argumenta la forma de un globo antes y después de ser inflado.

b. Considera que con una bomba de bicicleta inyectas aire en un recipiente bien cerrado. Cómo explicarías que sea más difícil inyectar conforme se va aumentando a medida que pasa el tiempo?

c. Equilibra una placa de vidrio, como se muestra en la figura 1. Levanta el vaso hasta que la cara inferior de la placa se ponga en contacto con el agua. Ahora, baja lentamente el vaso. ¿Qué sucede?, ¿Qué puede decir con respecto a la fuerza de atracción de las moléculas del agua entre sí, comparada con la fuerza de atracción entre las moléculas del agua y las del vidrio? Explica o argumenta brevemente.

ACTIVIDAD 4
Fase de Introducción a nuevos conocimientos

Objetivo 4

El principal objetivo de esta actividad, lo constituye la caracterización y distinción de los modelos atómicos de J.J Thompson, Ernest Rutherford y Niels Bohr. Para ello, en forma individual, cada estudiante leerá las preguntas. Posteriormente se socializan las respuestas al grupo, para luego discutir y consensuarlos aspectos más relevantes de cada una según lo discutido en clases, eligiendo un

Se sugiere al profesor propiciar la argumentación científica.

¿Qué es un modelo atómico ? En términos generales, podemos considerar que los modelos atómicos corresponden a representaciones simplificadas de un fenómeno, objeto o sistema, en este caso la materia y su estructura a nivel submicroscópico, que permite describir, explicar y predecir sobre él.

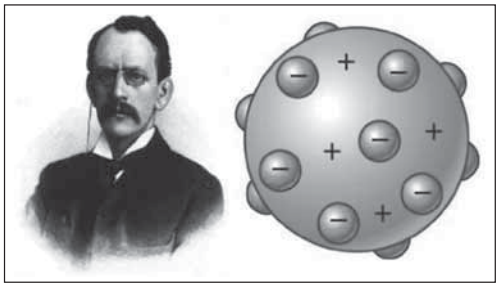
Se sugiere al profesor que utilizando esta información, y otra complementaria, se refiera discretamente desde el punto de vista teórico e histórico del modelo atómico de Thompson y de Rutherford, estimulando al estudiantado a discutir las diferencias de ambos modelos.

Con el desarrollo de laboratorios virtuales, los estudiantes caracterizarán los modelos atómicos de Rutherford y Bohr. En este último, evidenciarán las relaciones teóricas y empíricas de su teoría, en la explicación de los espectros.

Lectura complementaria 1

Modelo atómico de Thomson

J. J. Thomson (1856-1909), profesor de la Universidad de Cambridge, a fines del siglo XIX descubrió el electrón y, a base de este hallazgo, propuso un modelo atómico que se conoció como "Modelo de Budín de pasas", donde los electrones estaban diseminados en una esfera uniforme de carga positiva.



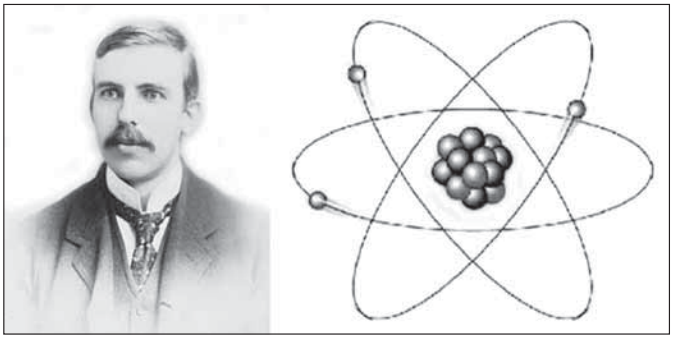
J. J. Thomson
Modelo de Budín de pasas

Lectura complementaria 2

Modelo Atómico de Rutherford

Alrededor de 1907, Ernest Rutherford (1871-1937), profesor de física de la Universidad de Manchester, a partir de su experimento del bombardeo de partículas α sobre una delgada lámina de oro , propuso que el átomo debería tener las siguientes características:

1. La mayor parte de la masa y la carga positiva se concentran en una región muy pequeña a la que él denominó núcleo.
2. Los electrones se mueven constantemente entorno al núcleo.
3. La mayor parte del átomo se encuentra vacío.



Ernest Rutherford - Representación del modelo atómico de Rutherford

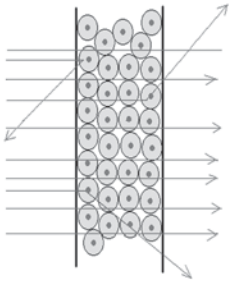
Desde Rutherford, numerosos experimentos han demostrado que la mayoría de los núcleos son aproximadamente esféricos y tienen un radio promedio dado por

$r = r_0 A^{1/3}$

Donde r_0 es una constante igual a $1{,}2 \times 10^{-15}$ m y A el número de masa. Debido al uso de longitudes tan pequeñas en física nuclear, una unidad de longitud conveniente es el femtómetro (fm), llamado algunas veces fermi, definido por: $1\text{fm} = 10^{-15}$ m

Observación:

Si quisiéramos dimensionar que tan pequeño es un femtómetro, hay que imaginarse un granito de arena dividido en un millón de partes y luego, uno de esos pedacitos se vuelve a dividir en un millón de partes más pequeñas, en ese instante cada uno de ellos mide un femtómetro.



ACTIVIDAD 5
Fase de Introducción a nuevos conocimientos

Objetivo 5

Simulación del experimento de Rutherford

A continuación se sugiere al profesor que los estudiantes se organicen en grupos pequeños, y participen de las siguientes actividades:

a. En un PC con acceso a internet, dirígete a la siguiente dirección:
   http://phet.colorado.edu/en/simulation/rutherford-scattering
   En el programa interactivo, se simula un haz de partículas que se dirigen hacia los átomos que forman el blanco. Estas se dispersan por efecto del campo eléctrico y se registran en detectores, que están dispuestos en forma de anillo.

A continuación, desarrolle las siguientes actividades:

b. En el control de selección Material de Blanco, elija el elemento oro.
c. Para seleccionar el nivel de energía de la partícula, diríjase al control Energía y seleccione 5 MeV.
d. Presiona el control Empieza y observa.

Se sugiere al docente desarrollar la competencia explicativa.

ACTIVIDAD 6
Fase de Introducción a nuevos conocimientos

Objetivo 6

El objetivo principal de esta actividad es debatir e intercambiar distintos puntos de vista, en relación a los modelos atómicos estudiados. Se sugiere al profesor estimular a los estudiantes a que justifiquen o argumenten las siguientes preguntas:

a. ¿Qué sucede a medida que aumentamos el número atómico de los elementos dispuesto como blanco? Argumenta brevemente (en esta actividad, procura mantener constante la energía de la partícula incidente).
b. ¿Qué suposición debemos establecer, para poder explicar la desviación de las partículas alfa?
c. ¿Qué contradicción presuponen los efectos observados, al compararlos con la teoría propuesta por Thomson? Argumenta brevemente.

ACTIVIDAD 7
Fase de Introducción a nuevos conocimientos

Objetivo 7

El objetivo principal de esta actividad, es debatir e intercambiar distintos puntos de vista en relación a los modelos atómicos estudiados, incluyendo ahora el modelo de Bohr. Se sugiere al profesor antes de trabajar el modelo atómico de Bohr, dar la posibilidad a los estudiantes para intercambiar sus puntos de vista, a partir de las distintas interpretaciones que hacen de los modelos atómicos estudiados anteriores, y explicarlos según sus ideas previas.

Lectura complementaria 3

Modelo Cuántico de Bohr

En 1913, Niels Bohr proporcionó una explicación de los espectros atómicos que incluye una combinación de ideas de la teoría cuántica de Planck, la teoría fotónica de la luz de Einstein, los modelos iniciales del átomo y la mecánica Newtoniana.

Las ideas básicas de la teoría de Bohr cuando se aplican al átomo de hidrógeno, son como sigue:

a. El electrón se mueve en órbitas circulares alrededor del protón, bajo la influencia de la fuerza de atracción de Coulomb.
b. Existen órbitas estables donde el electrón no emite energía en forma de radiación.
c. La radiación es emitida por el átomo, cuando el electrón "salta" de una órbita inicial con mayor energía, a una órbita con energía menor. La frecuencia f del fotón emitida en el salto, se relaciona con el cambio en la energía del átomo, y es independiente de la frecuencia del movimiento orbital del electrón.

$$E_i - E_f = h\,f \qquad \textbf{[1]}$$

"h" corresponde a la constante de Planck y tiene un valor de 6,63 x 10-34 [J·s]

d. El tamaño de las órbitas permitidas al electrón, son aquellas para las cuales el momentum angular orbital del electrón alrededor del núcleo, es un múltiplo entero de $\hbar = h / 2\pi$:

$$\mathbf{m_e\, v\, r = n\,\hbar} \qquad \mathbf{n = 1,2,3,...} \qquad \mathbf{[2]}$$

1.4.3 Fase 3 o Fase de Estructuración o Sistematización:

En esta fase, el docente debe identificar las variaciones conceptuales de los estudiantes, propiciando la aplicación de los "nuevos modelos teóricos", junto con sus necesarias correcciones y ajustes. Para ello se sugiere la actividad 5.

ACTIVIDAD 8
Estructuración y Sistematización

Objetivo 8

El objetivo principal de esta actividad es indagar sobre la explicación científica acerca del decaimiento radiactivo. El curso, organizado en pequeños grupos, indagará acerca del decaimiento radiactivo, representando empíricamente los procesos de desintegración que experimentan algunos núcleos inestables.

Como indicación general, se recomienda al docente un adecuado desarrollo teórico de los temas involucrados en la presente lección, para lo cual se dispone de la guía informativa "Radiactividad" (ver anexo Nº4), donde los estudiantes se informarán sobre los distintos procesos asociados con "estabilización" de algunos elementos. Una adecuada profundización teórica, debe ir acompañada con un desarrollo por parte del docente, de las leyes que rigen el decaimiento radiactivo, como introducción al concepto de vida media.

En relación con el desarrollo de la presente actividad empírica, se aconseja la formación de pequeños grupos, que no excedan las tres personas, distribuidos uniformemente en la sala.

La radiactividad es un proceso de desintegración espontánea que se manifiesta en algunos núcleos atómicos, donde se produce una emisión de partículas subatómicas y ondas electromagnéticas. Las más conocidas son las partículas alfa y beta, y los rayos gama. Todo núcleo inestable; en algún momento se desintegrará, pero el momento exacto en que ocurrirá el fenómeno es imposible de precisar; por este motivo se habla de probabilidad de desintegración .

Materiales: 200 "monedas" de cartón con caras de color amarillo y verde, cuaderno y lápices

Procedimiento sugerido

a. Considerando que la "cara" (color amarillo) de una moneda representa la desintegración de un átomo, toma las 200 monedas y lánzalas al aire. Cuenta todas las monedas que cayeron de "cara" y forma con ellas una pila.

b. Vuelve a lanzar al aire las monedas que cayeron de "sello", y forma una segunda pila con las que ahora cayeron de "cara" (color amarillo).

c. Repite el procedimiento las veces que sean necesarias, usando cada vez sólo las monedas que hayan caído de sello (color verde).

d. Cuenta el número de monedas de cada pila y anota tus resultados en una tabla como la siguiente:

Número de Lanzamientos	Número de Monedas presentes	Número de Monedas de "cara"
1 2 3 4 5 6 7		.... ¿Cuántas de las monedas de que dispones eliminas cada vez que las tiras al aire?

e. Con los datos obtenidos, realiza un gráfico del número de lanzamientos versus el número de monedas presentes. ¿Cuál es el nombre del tipo de curva obtenida?

f. ¿En qué lanzamiento podemos encontrar la mitad de las monedas que teníamos inicialmente? Explica.

g. Observa y anota el número de monedas presentes, para el número del lanzamiento de la pregunta anterior, dividido en 2 y 4. ¿Qué puedes observar en la cantidad de monedas? ¿En qué relación se encuentran?¿Qué argumentos tienes para ello?

Actividad 9
Estructuración y Sistematización

Objetivo 9

El objetivo principal de esta actividad es explicar discretamente, utilizando el análogo de las monedas, el decaimiento de los átomos radiactivos.

Los átomos radiactivos decaen de forma similar al comportamiento de las monedas: en un cierto tiempo, la mitad de los átomos radiactivos de una muestra se desintegran.

Se sugiere al profesor definir al estudiantado el tiempo de vida media antes de desarrollar las actividades que vienen a continuación.

a. Si consideramos que el porcentaje de desintegración de una muestra es de 50%, completa la siguiente tabla.

Tabla Nº4
Desintegración de núcleos atómicos

Instante (Hora)	**N° de núcleos inestables presentes**	**N° de núcleos que se desintegran en la siguiente hora**
0	34	
1		≈ 9
2		4
3		2
4		
5		

b. Gráfica el instante (hora) versus el número de núcleos inestables presentes.

c. Explica o argumenta brevemente en relación a las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es el tiempo de vida media de la muestra?
- ¿Cuál es la utilidad que podría atribuirse a la regularidad de los procesos de desintegración?
- ¿Qué características posee el tipo de curva obtenida en los gráficos?

Una adecuada profundización teórica, debe ir acompañada con un desarrollo, por parte del docente, de las leyes que rigen el decaimiento radiactivo, como introducción al concepto de vida media.

Fase Nº 4 de Aplicación o Transferencia

Se espera que en esta etapa, el estudiantado utilice discretamente el marco teórico de las fases anteriores, para aplicar sus conocimientos a nuevas actividades de evaluación de aprendizaje.

Actividad 10
Aplicación y Transferencia

Objetivo 10

El objetivo principal de esta actividad, es determinar la probabilidad de desintegración y supervivencia de una muestra.

Conocido el carácter probabilístico de los procesos de decaimiento, los estudiantes realizarán una actividad escrita donde determinarán la probabilidad de desintegración y supervivencia de una muestra, justificando la importancia y aplicación de los radio-isótopos, en variadas actividades del quehacer humano.

Con la incorporación del concepto de probabilidad, como una característica del decaimiento radiactivo, los alumnos y alumnas completarán el cuadro, con el análisis de la incorporación de los conceptos de probabilidad de desintegración y supervivencia de un núcleo inestable. Se recomienda que la presente actividad, sea realizada individualmente por cada uno de los estudiantes, para que en la última parte de la clase, se analicen los resultados obtenidos en la pizarra con el adecuado seguimiento del docente guía.

Materiales: Cuaderno, lápices y calculadora.

Procedimiento sugerido

Organizados en parejas, desarrollen la siguiente guía de actividades. Elijan un representante del grupo, quien tendrá el deber de exponer las conclusiones a la clase, cuando el profesor así lo indique. Disponen de un tiempo de25 minutos. Como actividad evaluativa, cada grupo desarrollará una de las preguntas de las guías en la pizarra, indicando los datos y el procedimiento empleado en el desarrollo del ejercicio.

a. En un intervalo cualquiera de tiempo, un núcleo inestable tiene sólo dos alternativas: o se desintegra o sobrevive. Como no hay certeza

de lo que ocurrirá, hablaremos entonces de la Probabilidad de _____ y de la Probabilidad de _____en un intervalo de tiempo dado.

b. Si en una hora el porcentaje de desintegración es del 20%, significa que 20 de cada 100 núcleos inestables se desintegran y, en consecuencia, 80 de cada 100 sobreviven en ese intervalo de tiempo.

Considerando:

1. En cualquier intervalo de tiempo PD + PS = 1
2. $PS\ (2h) = [PS\ (1h)]^{2}$
3. $PS\ (3h) = [PS\ (1h)]^{3}$

Δt (tiempo)	**Probabilidad de Desintegración**	**Probabilidad de Supervivencia**
1 minuto		
30 minutos		
1 hora	0,200	0,800
2 horas	0,360	
3 horas		

c. ¿Serán útiles los radioisótopos? Argumenta brevemente. Se sugiere al profesor trabajar discretamente con los siguientes enunciados incompletos, que podrá ajustar debidamente según el contexto de la audiencia.

Los radioisótopos constituyen una herramienta muy útil en el _____ y _____ de algunas enfermedades. Los isótopos radiactivos del _____se emplean en el_____ .

El _____ se utiliza como sustituto del radio en el tratamiento de procesos cancerosos.

El empleo de radioisótopos para realizar mediciones de la velocidad de _____ de máquinas y motores.

En los procesos de _____ de rocas y fósiles.

ACTIVIDAD 11
Aplicación y Transferencia

Objetivo 11

El estudiantado, organizado en parejas, resolverá algunos problemas donde podrá determinar la cantidad de energía liberada, en algunos procesos de fisión nuclear.

a. Calcule la energía liberada cuando 1,00 kg de ^{235}U se fisiona, tomando la energía de desintegración por evento igual a Q = 208 MeV

b. Encuentra la energía liberada en la reacción de fisión:

$$^{1}_{0}n + {}^{235}_{92}U \rightarrow {}^{98}_{40}Zr + {}^{135}_{52}Te + 3\,(^{1}_{0}n)$$

Las masas atómicas de los productos de fisión son: $^{98}_{40}Zr = 97.9120$ u; $^{135}_{52}Te = 134.9087$ u

c. Encuentre la energía liberada en la siguiente reacción de fisión:

$$^{1}_{0}n + {}^{235}_{92}U \rightarrow {}^{141}_{56}Ba + {}^{92}_{36}Kr + 3\,(^{1}_{0}n)$$

Las masas requeridas son:

$M\,(^{1}_{0}n) = 1{,}0086$ u

$M\,(^{235}_{92}U) = 235{,}04392$ u

$M\,(^{141}_{56}Ba) = 140{,}9139$ u

$M\,(^{92}_{36}Kr) = 91{,}8973$ u

d. ¿Qué fracción de la masa inicial del sistema emite?

Respuestas:

aR: $5{,}32 \times 10^{26}$ MeV

bR: 192 MeV

cR: 201 MeV

dR: 0,0913%

ACTIVIDAD 12
Aplicación y Transferencia

Objetivo 12

Los estudiantes leerán una guía informativa sobre reactores nucleares, centrando su atención en la energía proveniente de la escisión del núcleo atómico y, posteriormente, elaborarán explicaciones o argumentos este fenómeno.

ACTIVIDAD 13
Aplicación y Transferencia

Objetivo 13

El estudiantado, de manera grupal, realizará un debate cuyo tema central tendrá relación con los beneficios y perjuicios de la energía nuclear en la actualidad.

Indicación:

En esta actividad, el curso se dividirá en varios grupos, dentro de los cuales se designará un representante, que dará a conocer cuál es la postura que adopte el grupo utilizando argumentos consistentes. Tras esto, el profesor indicará que para el debate cada grupo intercambiará sus papeles, de modo que los grupos que defiendan ahora tendrán que atacar y viceversa. Para la presente actividad, se proporcionan dos documentos informativos, que servirán de apoyo en la realización del debate.

1.5 Anexos

ANEXO 1

Síntesis de actividades y Competencias de Pensamiento Científico (CPC) que promueve el tratamiento y metodología de enseñanza de esta U.D.

CPC	Actividad de aprendizaje y/o evaluación	Planos de análisis o desarrollo de la CPC	Tipo de contenido específico (conceptual y actitudinal)
EXPLICACIÓN, JUSTIFICACIÓN Y ARGUMENTACIÓN	**1**	Instrumental, grupal y Cultural	Instancia exploratoria de los conceptos asociados al proceso de fisión nuclear.
	2	Personal y Cultural	Modelos atómicos.
	3	Instrumental, Personal y Cultural	Fuerzas entre partículas.
	4	Instrumental, Personal	Modelo atómico de Rutherford y Modelo cuántico de Bohr.
	5	Instrumental, grupal	Simulación del experimento de Rutherford.
	6	Instrumental, personal y social.	Modelos atómicos
	7	Grupal, cultural y social	Otros modelos de átomos.
	8, 9 y 10	Instrumental, grupal, personal, social	Decaimiento radiactivo, probabilidad de desintegración y supervivencia. Vida media
	11	Grupal, social.	Fisión nuclear.
	12	Instrumental y Personal	La energía proveniente de la escisión del núcleo
	13	Social y cultural.	Energía nuclear

Breve comentario

Debido a la importancia que reviste la aclaración de los CPC que se trabajan con cada una de las actividades, se puede discutir los atributos de la **EXPLICACIÓN**, implica la *declaración de cualquier tema en una forma clara y comprensible, empleando palabras del dominio común y las pertenecientes al carácter científico,* y la **JUSTIFICACIÓN Y ARGUMENTACIÓN***requiere adquirir un análisis de las ideas y una interrelación de las mismas, para la construcción de una hipótesis que las explique tomando posturas o tomando ideas propias aunque sean contradictorias.*

ANEXO 2

FICHA METODOLÓGICA DE LA UD PARA ORIENTAR AL DOCENTE

Nombre UD	**Fisión Nuclear**

Actividad de Aprendizaje y Evaluación para los estudiantes

- Con la realización de una dinámica de "lluvia de ideas", cada uno de los estudiantes, organizados en grupos, deberá escribir uno o más conceptos asociados al proceso de fisión nuclear en una ficha. Posteriormente, cada grupo, en una cartulina, esquematizará los temas en estructura global, reconociendo los vínculos (indicados a través de flechas) presentes entre cada uno de los conceptos.
- Los alumnos y alumnas desarrollarán grupalmente, una actividad experimental, donde evidenciarán las características y el comportamiento de las partículas enunciadas en la teoría cinético-molecular de la materia.
- Desarrollo de laboratorio virtual: "Simulación del experimento de Rutherford".

"Modelo Cuántico del Átomo de Bohr".

- Lectura de guía informativa "**Radiactividad".**
- Como instancia interdisciplinaria entre las asignaturas de física y matemáticas, se aconseja el desarrollo de una actividad experimental, con la medición de la probabilidad de desintegración y supervivencia de una partícula radiactividad.
- Lectura de la guía informativa **"Fisión nuclear".**
- Como una forma de reforzar el concepto de fisión nuclear, se aconseja la realización de una actividad de ejercitación.
- Como una instancia de actualización, se motiva a los estudiantes a la realización de un debate que se centrará en los beneficios y perjuicios de la energía nuclear, que contará con el apoyo de guías informativas ("Reactores Nucleares").

Función Didáctica en el Ciclo de Aprendizaje

Exploración:

- Incorporar la discusión de temas de la vida cotidiana, para una vinculación con los temas tratados.
- Evaluar los conocimientos previos, con el desarrollo de dinámicas que permitan recoger las preconcepciones de los estudiantes.
- Incentivar la generación de un ambiente que propicie el trabajo científico, estimulando el respeto, tolerancia, trabajo en equipo, discusión y análisis por parte de los estudiantes.

Introducción de nuevos conocimientos

- Como todo proceso educativo, es deseable que el proceso de exploración dé paso natural a la introducción de los nuevos temas, procurando no olvidar las ideas o aspectos teóricos con los cuales se ha dado inicio a la reflexión.

Sistematización o Estructuración

- No se debe olvidar la importancia del profesor, como un guía en el proceso de enseñanza- aprendizaje, que debe mantenerse atento a las construcciones equivocadas del conocimiento científico, por parte de los estudiantes; por ende, debe evaluar progresivamente los resultados de las actividades mediante, por ejemplo, puestas en común.
- Como el estudiante juega un rol protagónico en el proceso educativo, debe ponerse especial atención en la selección de las actividades, para de esta manera, propiciar el desarrollo de las competencias de interés (explicación, sistematización, argumentación, comunicación y validación de las ideas), que sean extensibles a otros subsectores de aprendizaje.

Aplicación

- Estimular la aplicación de los nuevos conocimientos teórico-prácticos, a situaciones que respondan a los intereses de las alumnas o alumnos.

Sugerencias Metodológicas para aplicar en la Unidad Didáctica

- Caracteriza las cualidades de los integrantes del grupo-curso, para una evaluación de la metodología más adecuada para el trabajo; ello mejorará el tratamiento de los contenidos de acuerdo al perfil del alumnado.
- Incorpora la discusión de situaciones del conocimiento e interés del estudiante, como una forma de iniciar el proceso de exploración de los temas de interés.
- Explicita los objetivos de cada clase al inicio de la misma, como una forma de orientar la finalidad de las instancias educativas.
- Incorpora actividades de aprendizaje que incorporen la elaboración de explicaciones, a partir de la sistematización de la información y la argumentación de sus ideas, para su posterior comunicación y validación, mediante la interacción entre los estudiantes.
- Un desarrollo histórico de los conceptos, ayuda a los alumnos a situarse en el contexto donde tuvieron lugar los temas de interés, enfatizando en las limitantes técnicas donde se gestaron dichos avances.
- Contempla la utilización de actividades experimentales, que incluyan las instancias virtuales debido a su importe valoración, fácil disposición y accesibilidad en la red (sitios web o páginas).
- Siempre en el desarrollo de cualquier actividad, es importante considerar el tiempo de extensión de la misma, cuidando evitar la interrupción o fragmentación de los contenidos, en la construcción del marco conceptual.
- Junto con lo anterior, la formación de grupo de trabajos se transforma en una actividad necesaria en la construcción del conocimiento, preparando a los jóvenes para las exigencias de la vida actual.
- El uso de cálculos matemáticos y el desarrollo de gráficos, debe transformarse en un apoyo para el estudiante.

- Las actividades extraprogramáticas, como salidas a museos o centros de investigación, se transforman en instancias que brindan un muy buen apoyo para el reforzamiento de los contenidos.
- Es necesario propiciar la generación de instancias que promuevan el dialogo con sus respectivos productos, como ocurre en el caso de los debates.
- La coevaluación y la autoevaluación por parte de los estudiantes, representan actividades que mejoran el compromiso en la ejecución de las actividades planificadas.
- Favorece la utilización del Sistema Internacional ([m],[Kg],[s]), y del Cegesimal de unidades ([cm],[g],[s]), como una forma de estandarizar los resultados de las instancias experimentales, corrigiendo los posibles errores en las cálculos y mediciones efectuadas.

Posibles obstáculos o eventualidades en su aplicabilidad

- El grado de abstracción de los temas desarrollados en esta unidad, requiere la utilización de preguntas relacionadas con la vida del estudiante, que no siempre son significativas para ellas (os).
- Desconocer los conocimientos previos específicos de los estudiantes.
- Carecer de materiales básicos para el desarrollo de las actividades experimentales.
- No disponer de acceso a conexión a la red internet.
- Que los estudiantes no asuman una actitud de compromiso con las actividades.
- Carecer de material bibliográfico adecuado que permita complementar el trabajo de los alumnas(os).
- Número mayor de integrantes necesarios para el desarrollo de una actividad en forma óptima.
- No contar con recursos audiovisuales complementarios, que sirvan de apoyo al trabajo en clase.

ANEXO 3

GUÍAS INFORMATIVAS

1. RADIACTIVIDAD

Desintegraciones Nucleares

En la figura 1,aquellos núcleos que están encima o debajo de la *línea de estabilidad,* van a tender a desplazarse hacia esta línea, por medio de una reacción y esta reacción produce una emisión:

Decaimiento Alfa

Cuando un núcleo padre emite una partícula α ($^4_2$He), pierde dos protones y dos neutrones. El número atómico Z disminuye en 2, el número de masa A disminuye en 4. Un ejemplo:

$$^{238}_{92}U \rightarrow ^{234}_{90}Th + ^{4}_{2}He$$

La vida media para el decaimiento del ^{238}U es de 4,47 x 10^9 años.

El proceso de transmutación de un elemento en otro, que se experimenta en el decaimiento alfa, recibe el nombre de **decaimiento espontáneo.**

Una forma de decaimiento lo constituye la emisión de una partícula alfa, por parte de núcleos pesados inestables. Para escapar del núcleo una partícula alfa debe penetrar una barrera de potencial, formada por la combinación de la repulsión eléctrica entre la partícula alfa y el núcleo atómico (con carga neta positiva), y la atracción de la fuerza nuclear. En ocasiones, una partícula alfa realiza el **efecto túnel** a través de la barrera, hecho que constituye el mecanismo básico de este tipo de decaimiento, y explica las grandes variaciones en los tiempos de vida media de distintos núcleos radiactivos.

Decaimiento Beta

Cuando un núcleo emite una partícula β, el núcleo hijo conserva el número de masa, pero sufre una variación en el número atómico Z, ganando una unidad para el caso que la emisión corresponda a un electrón (e^-), y pierde una unidad si la partícula emitida corresponde a un positrón (e^+):

$$^{14}_{6}C \rightarrow ^{14}_{7}N + ^{0}_{-1}e + \bar{\nu}_e\ \bar{\nu}_e$$

$$^{12}_{7}N \rightarrow ^{12}_{6}C + ^{0}_{+1}e + \nu_e$$

Un análisis de estos procesos, bajo las consideraciones de las leyes de conservación de la energía, espín y momentum lineal, revelan la emisión de dos nuevas partículas el neutrino electrón (ν_e) y el antineutrino electrón ($\bar{\nu}_e$) ($\bar{\nu}_e$).

El decaimiento que sufre un neutrón aislado –no ligado al núcleo de un átomo, que presenta un tiempo de vida media de casi 10 minutos– decae en tres partículas: un protón, un electrón y un antineutrino electrón. Sin embargo, una vez que los neutrones libres entran en la materia, muchos de ellos son absorbidos por los núcleos atómicos y son estabilizados del decaimiento, mediante la fuerza nuclear de otros nucleones.

El proceso se representa por: $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e\ \bar{\nu}_e$

Proceso del decaimiento beta

Energéticamente, el neutrón aislado puede decaer porque su masa es ligeramente mayor que la del protón, y por lo tanto, el exceso de masa de la transformación neutrón → protón como proceso real, puede transformarse en masa y energía cinética de los productos de decaimiento. El decaimiento de un neutrón aislado, ocurre a través de interacciones débiles, no pudiendo decaer a través de interacciones fuertes (a pesar de ser partícipe de las mismas), debido a que esto violaría la ley de conservación de la energía.

Debido a que el neutrino no tiene ni masa ni carga eléctrica, es una partícula muy difícil de detectar directamente. Por esta razón, las primeras pruebas del decaimiento β, parecían indicar que se trataba del proceso $n \rightarrow p + e^-$, es decir, la reacción de dos cuerpos en el estado final. Sin embargo una reacción de este tipo implica una distribución definida de energías para la reacción entre las partículas del estado final, hecho que contrastaba con el espectro continuo que se observó para los electrones emitidos. La solución a este problema la dio Pauli, en 1933.

Planteó que la reacción anterior no es correcta y que la energía, momentum lineal y momento angular que se requieren para satisfacer las leyes de conservación, se las lleva una tercera partícula sin carga eléctrica, con masa muy pequeña, cero en primera aproximación, y con spin ½. Bajo estas hipótesis Fermi desarrollo una teoría satisfactoria del proceso. El neutrino permaneció como partícula teórica hasta 1956, cuando fue evidenciado experimentalmente por Reines y Cowan.

Captura K

Se produce cuando un núcleo padre captura uno de sus propios electrones orbitales (en su mayoría de la capa K), liberando un neutrino. El producto final del decaimiento es un núcleo cuya carga es Z – 1:

$$^{7}_{4}Be + {}^{0}_{-1}e \rightarrow {}^{7}_{3}Li + \nu_e$$

Decaimiento Gamma

Frecuentemente, un núcleo que sufre decaimiento radiactivo, queda en un estado de excitación. El núcleo puede sufrir, entonces, un segundo decaimiento hasta un estado de energía inferior, emitiendo un fotón de alta energía (1MeV a 1 GeV). Los fotones emitidos reciben el nombre de rayos gamma (γ), y tiene una energía dada por la relación de cuantos de Planck (e = *h f; h = constante de Planck y f = frecuencia*), que representa la diferencia entre dos niveles de energía nuclear. Los rayos gamma no cambian ni el número atómico, ni la masa atómica de un núcleo. La reacción se puede representar como: ${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z}X + \gamma$.

Leyes del Decaimiento Radiactivo

Un proceso de decaimiento de un muestra radiactiva, depende del número de núcleos radiactivos presentes (que no han sufrido decaimiento): Si dN núcleos decaen en el intervalo de tiempo dt de N núcleos iniciales, dN/N será la fracción de núcleos que decaen. La probabilidad de decaer en la unidad de tiempo es:

$$\frac{dN / N}{dt}$$

Experimentalmente se ha observado que esta cantidad es constante para cada elemento y característica:

$$\lambda\, dt = \frac{-\, dN}{N}$$

Donde λ es llamada **constante de decaimiento.** El signo menos, significa que decrece el número de nucleones.

La solución de la expresión anterior es: $\mathbf{N = N_0\, e^{-\lambda t}}$

Donde N_0 corresponde al número de núcleos radiactivos iniciales en t = 0.

El tiempo que tarda el elemento para que la mitad de los núcleos originales hayan decaído:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda}$$

Este parámetro se conoce como **vida media:** El tiempo que tarda en decaer la mitad de un número dado de núcleos radiactivos.

La actividad de un isótopo se mide en **Curie (Ci):** 1Ci≡ 3.7 x 10^{10} decaimientos /s.

La unidad del Sistema Internacional es el **becquerel (Bq):** 1Bq ≡ 1 decaimiento /s.

Por ende, Ci = 3.7 x 10^{10} Bq, debido a la gran magnitud del curie, se utilizan más a menudo, el milicurie y el microcurie.

Cuestionario:

Considerando los contenidos expuestos en esta guía, realiza un resumen de los principales temas expuestos, y además, responde las siguientes preguntas:

a. ¿Cuáles son los usos de la radiactividad?

b. ¿Cuáles son los tres elementos principales de un reactor, en una central nuclear?

c. Escribe tus reflexiones en torno a la siguiente idea: "Los combustibles fósiles son inagotables y su energía proviene inicialmente del Sol".

INSTANCIA DE PROFUNDIZACIÓN

Para una versión interactiva, visite la siguiente página:
http://www.walter-fendt/ph11s/lawdacays.htm

2. FISIÓN NUCLEAR

El descubrimiento de la radiactividad poco antes del comienzo del siglo XX, y suscitó gran interés entre diversos tipos de personas. Algunos pensaron que no se trataba más que de una curiosidad científica, otros pensaron que servía para curar enfermedades, y sólo unos cuantos pensaron que se usaría como fuente de energía abundante para calentar casas, impulsar fábricas e iluminar ciudades de noche.

Las reacciones radiactivas liberan energía, pero en cantidades muy pequeñas. Pero entonces, en 1939, poco antes del inicio de la Segunda Guerra Mundial, se descubrió una reacción nuclear semejante a la radiactividad, pero que liberaba enormes cantidades de energía. Se trataba del rompimiento del átomo, o **fisión nuclear**. Este proceso, junto con la fusión nuclear, genera más energía por kilogramo de masa de lo que jamás imaginaron los científicos atómicos.

Los estudiantes de biología saben que los tejidos vivos crecen por división de las células. La división de las células vivas se llama también fisión. De manera análoga la división de los núcleos atómicos se conoce como **fisión nuclear**.

Con el descubrimiento del neutrón, el físico italiano Enrico Fermi (1901-1954), bombardeó uranio con neutrones para tratar de producir elementos transuránicos. El producto de esta reacción tenía una vida media distinta a la

de los elementos pesados, creyendo Fermi en esta forma, haber producido un elemento transuránico.

Hahn separó químicamente los productos de esta reacción y observó la presencia de bario y lantanio. De esta forma se descubrió la **fisión** nuclear que ocurre cuando un núcleo pesado, como el ^{235}U, se divide en dos núcleos más pequeños. En una reacción de este tipo, **la masa combinada de los núcleos hijos es menor que la masa del núcleo padre,** y la diferencia de masa se llama **masa defecto**. La fisión tiene comienzo cuando un núcleo pesado captura un neutrón térmico. Si multiplicamos la masa defecto por c^2, obtendremos la energía liberada en el proceso.

La masa sumada de los fragmentos de fisión es menor que la masa del núcleo original.

La masa perdida se convierte en energía tal como lo predice la **Teoría de la Relatividad Especial** de Einstein:

$$\mathbf{E = mc^2 \rightarrow Masa = Energía}$$

Después de bombardear uranio (Z = 92) con neutrones, Hahn y Strassman descubrieron entre los productos de reacción, dos elementos de masa media, bario y lantanio. Poco después Lise Meitner (1878- 1968), y su sobrino Otto Frish (1904-1979), explicaron lo que había sucedido: el núcleo de uranio se había dividido en dos fragmentos casi iguales después de absorber un neutrón. Las mediciones mostraron que alrededor de 200 MeV de energías se liberaban en cada evento de fisión, y este hecho afectó el curso de la historia.

En 1938 en Berlín, un grupo de físicos y químicos descubrieron la fisión nuclear. La contribución más importante en este descubrimiento se debe a la física austriaca Lise Meitner; sin embargo a ella no se le reconoció su trabajo y el premio Nobel de 1944 por el descubrimiento de la fisión nuclear, fue otorgado a su colega Otto Hahn. Se presume que el hecho de que Lise Meitner era judía y era mujer, influenciaron al jurado del Nobel.

En la fisión nuclear interviene el frágil equilibrio entre la atracción que ejercen las fuerzas nucleares fuertes, y la repulsión de las fuerzas eléctricas que actúan entre las partículas del núcleo. En casi todos los núcleos predominan las fuerzas nucleares fuertes. Pero en el caso del uranio su predominio es tenue.

Si el núcleo de uranio se estira adquiriendo una forma alargada, puede ser que las fuerzas eléctricas lo alarguen aún más. Si el alargamiento alcanza cierto punto crítico, las fuerzas eléctricas superan a las fuerzas nucleares fuertes y el núcleo se divide en dos. Este es el proceso de fisión nuclear.

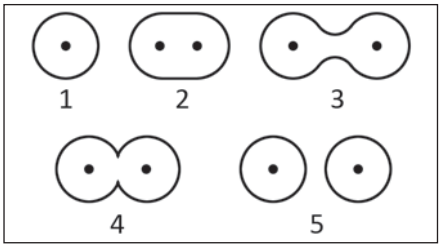


Figura: Fisión nuclear según el modelo de la gota líquida.

Para el caso del ^{235}U que reacciona con un neutrón térmico, dicha reacción se puede representar:

$$^{1}_{0}n + {}^{235}_{92}U \rightarrow {}^{236}_{92}U^{*} \rightarrow X + Y + \text{neutrones}$$

donde $^{236}_{92}U^{*}$ corresponde a un estado excitado que dura alrededor de 10^{-12} (s) antes de partirse en X e Y, los denominados fragmentos de la fisión. Al fisionarse el ^{235}U, se puede partir en más de 90 formas distintas. La mayor parte de los productos de la fisión son radiactivos y decaen generalmente por la emisión de beta negativo.

La energía que libera la fisión de un átomo de ^{235}U es enorme: *equivale a alrededor de siete millones de veces la energía que se desprende de la explosión de una molécula de TNT*. Dicha energía se encuentra principalmente en forma de energía cinética de los fragmentos de fisión, pero otra parte de ella corresponde a los neutrones expulsados y el resto está en forma de radiación gamma.

De la ecuación de Einstein $E=mc^2$, es evidente que la cantidad de energía generada en la fisión nuclear es inmensa (esto se debe a que el factor c^2, que es la velocidad de la luz al cuadrado, es muy grande). Este hecho se ha querido explotar para la producción eficiente de energía. El problema más serio que presentan los generadores de electricidad a base de energía de fisión, es que los fragmentos de fisión son altamente radiactivos. El material que resulta de un reactor nuclear es una fuente de contaminación ambiental, que trae graves consecuencias para la vida cuando éste se escapa de sus contenedores. En Estados Unidos existen ahora más de 30 mil toneladas de residuos radiactivos.

Reacción en cadena

Es importante mencionar que solo un neutrón inicia la fisión del átomo de uranio, y que el proceso produce casi tres neutrones adicionales. Estos neutrones, a su vez, pueden provocar la fisión de dos o tres nuevos átomos, lo que produce entre cuatro y nueve neutrones más. Si cada uno de ellos lograse dividir un solo átomo, como consecuencia se lograría producir entre 8 y 27 neutrones, y así sucesivamente. Este proceso es lo que recibe el nombre de reacción en cadena.

La construcción de una bomba atómica, alberga una dificultad importante, que reside en conseguir separar una cantidad suficiente de ^{235}U del ^{238}U, más abundante.

Desafortunadamente para la historia del ser humano en el planeta Tierra, una de las primeras aplicaciones que se le dio a la fisión nuclear fue para fines bélicos. A las 8:15 AM del día 6 de agosto de 1945 los Estados Unidos hicieron explotar la primera bomba atómica sobre la ciudad japonesa de Hiroshima. Al instante murieron más de 90 mil personas, los daños ambientales, materiales y sicológicos aún se siguen sufriendo. Tres días más tarde, una segunda bomba atómica fue lanzada sobre Nagasaki, con un nunca será igual.

Los neutrones liberados en los procesos de fisión, poseen alta energía, del orden de 2 MeV. Como la probabilidad de captura de un neutrón, incrementa al disminuir la energía, es necesario frenar tales neutrones hasta que alcancen energías térmicas para permitir que sean capturados, y produzcan fisión de otros núcleos de ^{235}U. Los neutrones energéticos son frenados por una sustancia moderadora que rodea el combustible. *En general, la rapidez de reacciones inducidas por neutrones, aumenta conforme disminuye la energía cinética del neutrón.*

Un reactor consta de tres partes: el combustible nuclear, las barras de control y el agua que se usa para transferir calor del reactor al generador. El combustible nuclear consta en su mayoría de ^{238}U, con un valor aproximado de 3 por ciento de ^{235}U. Las barras de control, cumplen la función de limitar el número de neutrones que fisionan otros núcleos de ^{235}U. Estas barras se encuentran confeccionadas por un material que sea capaz de absorber neutrones con facilidad.

En el reactor, el agua se mantiene a elevadas presiones, lo que permite que alcance temperaturas muy elevadas sin hervir. El agua transfiere su energía a otro sistema, algunas veces aislado para evitar la contaminación por radiación del agua del reactor, que contiene agua a menor presión encargada de impulsar el generador eléctrico o turbina.

Desde un punto de vista histórico, en los primeros años de la década de 1950, cuando se iniciaba el desarrollo de la energía nuclear, sólo disponían de uranio enriquecido Estados Unidos y la Unión de Repúblicas Socialistas

Soviéticas (URSS). Por este motivo, los programas de energía nuclear de Canadá, Francia y Gran Bretaña se centraron en reactores de uranio natural, donde no puede emplearse como moderador agua normal, porque absorbe demasiados neutrones. Por este motivo se desarrolló una serie de reactores enfriados y moderados por óxido de deuterio (D2O), también llamado agua pesada. Este sistema de reactores de deuterio-uranio (CANDU), ha tenido un satisfactorio funcionamiento, junto con su construcción en países como Argentina.

En Inglaterra y Francia, los primeros reactores de generación de energía a gran escala, utilizaban como combustible barras de metal de uranio natural, moderadas por grafito y refrigeradas por dióxido de carbono (CO_2) gaseoso a presión. Posteriormente, en Gran Bretaña, este diseño fue sustituido por un reactor refrigerado por gas. A principios de la década de 1990, estaban en construcción en todo el mundo más de 120 nuevas centrales nucleares.

ANEXO 4

Modelo Cuántico del Átomo de Bohr

1. Determine una expresión, que permita relacionar la energía y el radio de las órbitas del átomo de hidrógeno.

   Ayuda:

   i. Determina una expresión para la energía cinética K y la energía potencial U

   ii. Recuerda que la fuerza de atracción Coulombiana entre el electrón y el protón, es igual a la masa por la aceleración centrípeta ($a = v^2/ r$) del electrón.

2. Una expresión para el radio r_n de las órbitas permitidas, puede obtenerse despejando **v** de la cuarta consideración del modelo de Bohr.

V =	Velocidad tangencial del electrón.
m =	Masa del electrón. $9{,}11 \times 10^{-31}$ kg
K =	Constante de Coulomb. $8{,}99 \times 10^{9}$ Nm^2/C^2
h =	Constante de Planck. $6{,}63 \times 10^{-34}$ J · s

$$\mathbf{v^2 = \frac{n^2 \hbar^2}{m_e^2 r^2} = \frac{k_e e^2}{m_e r}}$$

$$\mathbf{r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{m_e k_e e^2}} \qquad \mathbf{n = 1,2,3,\ldots}$$

3. ¿Qué valor tendrán los radios para n = 1, 2, 3, 4, 5, 6? Para cada uno de los niveles anteriores, ¿cuál es el valor de la energía

4. En un PC con acceso a internet, dirígete a la siguiente dirección:
   http://www.walter-fendt.de/ph11s/bohrh_s.htm **OJO: LINK ERRÓNEO**
   y compara tus resultados con los que proporciona la animación.

A partir de la siguiente ecuación, podemos calcular la frecuencia del fotón emitido, cuando el electrón salta de una órbita exterior a una interior:

$$f = \frac{E_i - E_f}{h} = \frac{k_e e^2 1}{2 a_0 h} - \frac{1}{n_f^2 n_i^2} \qquad [\qquad\qquad]$$

Donde a_0 corresponde al valor del radio para n =1 (el radio de Bohr).

Puesto que lo que es medido es la longitud de onda, es conveniente usar $c = f \lambda$ ("c" es la velocidad de la luz: 3×10^8 [m/s]) para convertir la frecuencia en longitud de onda:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{f}{c} = \frac{k_e e^2}{2a_0 hc}\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$$

Bohr demostró que todas las series espectrales para el hidrógeno tenían una interpretación natural en su teoría. La figura muestra estas series espectrales como transiciones entre niveles de energía.

ANEXO 5

CUESTIONARIO

Objetivo 14

El estudiantado deberá responder individualmente, un cuestionario sobre todos los contenidos relacionados con fisión nuclear que fueron enseñados en la U.D.

Se sugiere el siguiente texto introductorio:

Dentro de la unidad del núcleo atómico, hemos visto un nuevo tema, el proceso de fisión nuclear. La intención del presente instrumento, es determinar qué conoces y cuál es tu relación con estas nociones científicas, por lo cual, te solicitamos que respondas con la mayor seriedad y honestidad posible. Para contestar, marca la alternativa que consideres correcta, para cada uno de los enunciados. Puedes comentar tus respuestas en la sección de "comentarios".

NOMBRE: _____

FECHA: _____

(Para la presente publicación, se indican las respuestas correctas en negrita).

El siguiente cuestionario tiene relación a temas de física moderna, encierra en un círculo la opción que consideres correcta:

1 Con respecto a la estructura del átomo, sus partículas constituyentes corresponden a:

a) Los protones.
b) Los electrones.
c) Los neutrones.
d) Todas las anteriores.
e) No sé.
f) No contesta.

2. En relación con la pregunta anterior, ¿cuáles de las partículas señaladas, reciben el nombre de Nucleones?:

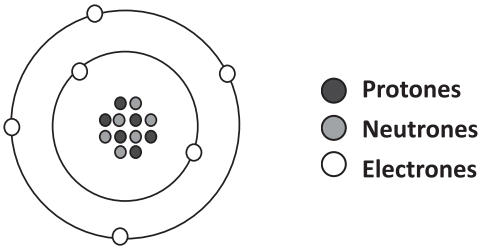
   a) Los protones y electrones.
   b) Los protones y neutrones.
   c) Los electrones y neutrones.
   d) Ninguna de las anteriores.
   e) No sé.
   f) No contesta.

3. ¿Cuál de los modelos atómicos vistos en clase, incorpora el concepto de ondas asociadas al movimiento de una partícula?:

   a) Modelo atómico de Thomson.
   b) Modelo atómico de Rutherford.
   c) Modelo atómico de Schrödinger.
   d) Modelo atómico de Bohr.
   e) No sé.
   f) No contesta.

4. Al observar con cuidado la figura, se observa que en el núcleo, las partículas se encuentran muy próximas entre sí. ¿Crees que debiera existir alguna fuerza entre dichas partículas, para que el núcleo no se desarme?

   a) Sí.
   b) No.



Átomo de Carbono

5. Si respondiste afirmativamente, ¿qué tipo de fuerza crees que sea?:

   a) Fuerza nuclear.
   b) Fuerza gravitatoria.
   c) Fuerza magnética.
   d) Fuerza eléctrica.
   e) No sé.
   f) No contesta

6. “Proceso de desintegración espontánea que se manifiesta en algunos núcleos atómicos”, la anterior definición corresponde a:

   a) Rapidez de desintegración.
   b) Captura K.
   c) Radiactividad.
   d) Semivida.
   e) No sé.
   f) No contesta.

7. La emisión de rayos, por parte de algunos núcleos radiactivos recibe el nombre de:

   a) Emisión probabilística.
   b) Fisión nuclear.
   c) Fusión nuclear.
   d) Decaimiento radiactivo.
   e) No sé.
   f) No contesta.

8. Un material radiactivo, cuando emite partículas u ondas:

   a) Se transforma en otro elemento.
   b) Sigue siendo el mismo, pero queda con menor energía.
   c) Se transforma en dos elementos iguales.
   d) No sucede nada.
   e) No sé.
   f) No contesta.

9. El proceso de fisión nuclear ocurre cuando:

   a) Un neutrón interactúa con un núcleo atómico.
   b) Un neutrón se une a un núcleo que choca con él, formando un elemento más pesado.
   c) Un neutrón se transforma en otro elemento.
   d) Un elemento químico choca con otro, desintegrándose productos del choque.
   e) No sé.
   f) No contesta.

10. COMENTARIOS:

Referencias Bibliográficas

Eisber, Robert M. (1978). Física Moderna. Editorial Limusa. México.

Wong, Samuel S. M. (1998). Introductory Physics. Second Edition. Wiley – Interscience Publication. United States of America.

Serway, Raymond A. & Beichner, Robert J. (2002). Física para Ciencia Ingeniería. Tomo II. Editorial Mc Graw-Hill /Interamericana Editores. México.

Saavedra, Igor (1978). Física de Partículas. Secretaría general de la Organización de los estados Americanos. E.E.U.U.

Hinzner, Fritz (año). Introducción a la Física de Reactores Nucleares. Universidad de Chile.

Mc Evoy, J. P. y Zárate, Óscar (1998). Teoría Cuántica para Principiantes. Editorial Era Naciente SRL. Argentina.

Hewitt, Paul G. (1995) Física Conceptual. México.

Hill, Faith F. & Stollberg, Robert (año). Laboratorio de física Fundamentos y Frontera. Publicaciones Culturales.

Brahim, Luis; Espinoza, Juan y Menares, Pedro (1995). Ciencias Físicas. Tomo I. Editorial Santillana.

Balochi, Emilio; Díaz, Sergio y otros autores (2000). Curso de Química General. Universidad de Santiago de Chile.

Asens, Amparo (año). Química Segundo Medio. Ediciones Pedagógicas Chilenas.

Castro S., Eduardo (2003). Enfoque de la enseñanza de la ciencia en el nuevo currículo de la educación Nacional. Revista Extramuros. Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación. Santiago de Chile.

Novak, J. (1992). Teoría y práctica de la educación. Alianza Universitaria secta edición. Madrid.

Driver, R. (1986). Psicología cognoscitiva y esquemas conceptuales de los alumnos. Revista Enseñanza de las Ciencias. Universidad Autónoma de Barcelona.

Pesa y Cudmani (1997). Sistematización de los resultados alcanzados en las investigaciones sobre concepciones alternativas. Memoria REF X, Tomo I, Mar del Plata. Argentina.

Ausubel, David; Novak, Joseph. y Hanesian, Helen (1996):.H. Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo. México.

Gutiérrez , E.; Capuano , V.; Perrotta M.; De la Fuente, A.: Follari, B. (2000). ¿Qué piensan los jóvenes sobre radiactividad, estructura atómica y Energía Nuclear?. Revista Enseñanza de la Ciencia. Universidad Autónoma de Barcelona.

De Posada, J.M. y Prieto Ruz, T. (1990). Exploraciones gráficas de ideas extraescolares de los alumnos sobre radiactividad. Revista Enseñanza de las Ciencias.

Solbes, J.; Catalajud, M. L.; Climent, J. y Navarro, J. (1987). Errores conceptuales en los modelos atómicos cuánticos. Revista Enseñanza de las Ciencias. Número extra (IV congreso).Universidad Autónoma de Barcelona.

Resnick, L. B. (1983). Mathematics and Science Learning: a new conception, Science, 220, pp. 477-478.

Feyman, Richard (1971). The Richard Feynman Lecture on physics. Fondo educativo interamericano.

Gil Pérez, D. (1993). Contribución de la historia y de la filosofía de las ciencias al desarrollo de un modelo de enseñanza aprendizaje como investigación. Revista Enseñanza de las Ciencias volumen 11, N° 2. Universidad Autónoma de Barcelona.

Capítulo 2

Las Leyes de Kepler

Una Unidad Didáctica desde la naturaleza de la ciencia para la enseñanza de la Física

Gerardo Saffer

"*Si he logrado ver más lejos, ha sido porque he subido a hombros de gigantes".*

Isaac Newton (1676), refiriéndose a sus predecesores Copérnico, Galileo y Kepler.

Contenido

- *Resumen*
- *Justificación de la Unidad Didáctica*
- *Presentación del tema*
- *Presentación de la Unidad Didáctica*
- *Desarrollo de la Unidad Didáctica*
- *Actividades de enseñanza, aprendizaje y evaluación*
- *Referencias Bibliográficas*

Resumen

En este capítulo se presenta una *Unidad Didáctica* (U.D.), para la enseñanza de las Leyes de Kepler en la educación secundaria fundamentada desde la *naturaleza de la ciencia.* Se proponen indicaciones y sugerencias para los profesores, actividades para los estudiantes y reflexiones para la comunidad en general, a fin de promover el desarrollo de competencias científicas. El propósito fundamental de esta propuesta, es disponer de un material fundamentado en la Didáctica de las Ciencias para la enseñanza de conceptos físicos, en particular del área de la astronomía, que permitan a los estudiantes construir conocimiento científico escolar, y al profesorado innovar sus prácticas educativas desde una perspectiva *socio-constructivista* y, en particular, desde un *modelo cognitivo de ciencia*.

2.1 Justificación de la Unidad Didáctica

Desde la didáctica de las ciencias se habla de *naturaleza de la ciencia*, para referirse a un *conjunto de ideas metacientíficas con valor para la enseñanza de las ciencias naturales* (Adúriz-Bravo, 2005, p. 12). Esta U.D. se fundamenta desde esta perspectiva, aludiendo a tres ejes de la naturaleza de la ciencia, los que a su vez apuntan a tres preguntas esenciales que nos podemos hacer sobre la ciencia:

1. El eje epistemológico, que nos ayuda a comprender qué es la ciencia y cómo se elabora;

2. el eje histórico, que nos ayuda a comprender cómo cambia la ciencia en el tiempo y;

3. el eje sociológico, que nos ayuda a comprender cómo se relaciona la ciencia con la sociedad y la cultura.

Con ello se pretende contribuir en la construcción de una imagen de ciencia *moderadamente realista* y *moderadamente racionalista*, donde lo que caracteriza a la ciencia y lo que hace que esta tenga sentido, no es su método sino su objetivo: *intentar interpretar los fenómenos del mundo y actuar sobre ellos, relacionándolos entre sí mediante modelos y teorías* (Izquierdo *et al.*, 1999. Citado por Sanmartí, 2002, p. 47).

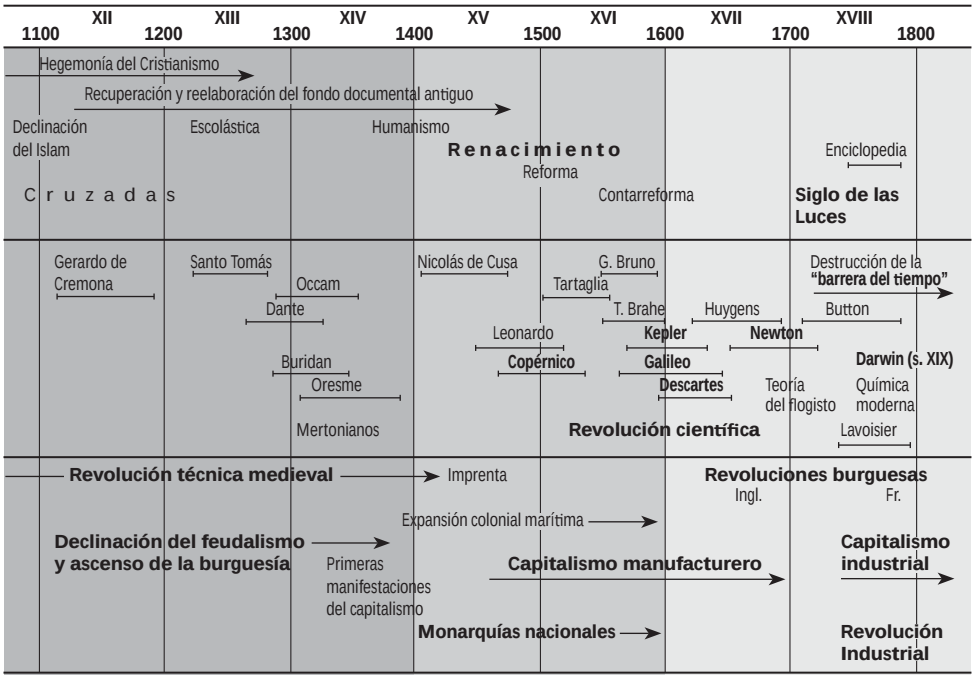
El interés por proponer una U.D., fundamentada en la naturaleza de la ciencia y en una imagen de ciencia –acorde al *modelo cognitivo de ciencia* (Giere, 1999, citado por Sanmartí, 2002, p. 47)– proviene del reconocimiento de que puede aportar a la enseñanza de las ciencias y en particular de la física, pues (Fernández, 2000; Adúriz-Bravo, 2005):

- Permite comprender mejor las ciencias, sus alcances y sus límites,
- contribuye a superar *obstáculos* (Astolfi, 2001, p. 127) en el aprendizaje de los contenidos, métodos y valores científicos,
- presenta la ciencia como construcción humana, social y, por tanto, colectiva,
- contribuye a mejorar las actitudes de los estudiantes hacia la ciencia, y mejorar así el clima del aula.

2.2 Presentación del tema

De acuerdo a Gribbin (2005, p. 41), Johannes Kepler forma parte de los llamados *últimos místicos* –al menos en lo que respecta a la astronomía–, ya que fue un personaje de transición entre el misticismo de los antiguos y la ciencia de Galileo –a quien él considera el *primer científico*–, y sus sucesores.

La siguiente cronología esquemática, que comprende el período entre los siglos XII y XVIII, permite situar a grandes rasgos, en el escenario europeo, a Kepler y otros protagonistas de la Historia de la Ciencia citados en este capítulo. En ella, también se destacan momentos relevantes de la historia social y política que sirvieron de contexto al desarrollo, y surgimiento de la Ciencia Moderna.



(Boido, 1996:134)

2.3 Presentación de la Unidad Didáctica

De acuerdo a la *Propuesta de Ajuste Curricular*[1] del Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC), de Junio de 2009, este tema se aborda en segundo año de enseñanza media, donde se describen los siguientes Objetivos Fundamentales (O.F.) y Contenidos Mínimos Obligatorios (C.M.O.) asociados:

Objetivos Fundamentales asociados al tema (selección)

1. Describir investigaciones científicas clásicas o contemporáneas relacionadas con los conocimientos del nivel, reconociendo el papel de las teorías y el conocimiento en el desarrollo de una investigación científica.
2. Organizar e interpretar datos, y formular explicaciones, apoyándose en las teorías y conceptos científicos en estudio.
3. Comprender que el desarrollo de las ciencias está relacionado con su contexto sociohistórico.
4. Reconocer las limitaciones y la utilidad de modelos y teorías como representaciones científicas de la realidad, que permiten dar respuesta a diversos fenómenos o situaciones problemas.
5. Analizar el movimiento de los cuerpos a partir de las leyes de la mecánica, y de las relaciones matemáticas elementales que los describen.
6. Reconocer la importancia de las leyes físicas formuladas por Newton y Kepler para realizar predicciones en el ámbito astronómico.
7. Reconocer diversas evidencias acerca del origen y evolución de sistema solar.

De acuerdo al documento del MINEDUC, "*Propuesta Ajuste Curricular. Capítulos introductorios"*[2] de Junio de 2009, los O.F. presentados son los aprendizajes que los estudiantes deben lograr al finalizar, en nuestro caso, la U.D. presentada. Estos aprendizajes se refieren a: conocimientos, habilidades y actitudes, donde, según el mismo texto, los *conocimientos* incluyen conceptos, sistemas conceptuales e información sobre hechos, procedimientos, procesos y operaciones; las *habilidades* se refieren a las capacidades de ejecutar un acto cognitivo y/o motriz complejo, con precisión y adaptabilidad a condiciones cambiantes, y; las *actitudes* son disposiciones hacia objetos, ideas o personas, con componentes afectivos, cognitivos y valorativos, que inclinan a las personas a determinados tipos de acciones.

1 Para más detalles, revisar: http://curriculum-mineduc.cl
2 Para más detalles, revisar: http://curriculum-mineduc.cl

Por su parte, en el mismo escrito, *los C.M.O. explicitan los conocimientos, habilidades y actitudes implicados en los O.F., y que el proceso de enseñanza debe convertir en oportunidades de aprendizaje para cada estudiante, con el fin de lograr los O.F. Si los Objetivos Fundamentales están formulados desde la perspectiva del aprendizaje que cada alumno y alumna debe lograr, los C.M.O. lo están desde la perspectiva de lo que cada docente debe obligatoriamente enseñar, cultivar y promover en el aula para desarrollar dichos aprendizajes.*

Contenidos Mínimos Obligatorios asociados al tema (selección)

Eje: "Habilidades de Pensamiento Científico" (adaptados al tema de la U.D.)

1. Identificación de teorías y marcos conceptuales, problemas, hipótesis, procedimientos experimentales, inferencias y conclusiones en investigaciones clásicas o contemporáneas, relacionadas con las leyes de Kepler.
2. Procesamiento e interpretación de datos, y formulación de explicaciones, apoyándose en los conceptos y modelos teóricos contenidos en las leyes de Kepler.
3. Identificación de relaciones de influencia mutua entre el contexto sociohistórico y la investigación científica, a partir de casos concretos clásicos o contemporáneos relacionados con las leyes de Kepler.
4. Realizar y dar respuesta a diversos fenómenos o situaciones problema.
5. Identificación de las limitaciones que presentan las leyes de Kepler en la explicación de diversas situaciones problema.

Eje: "Tierra y Universo" (selección)

1. Aplicación de las leyes de Kepler para explicar y hacer predicciones sobre la dinámica de los planetas y el sistema solar.

Por otra parte, en el documento ya citado, se menciona que los O.F. y los C.M.O. están orientados al desarrollo de competencias que se consideran fundamentales para el desarrollo personal, y para desenvolverse en el ámbito social, laboral y ciudadano. Para la conceptualización de competencia, se toma como referente el marco planteado por la OCDE (2002), y se dice que "*estas aluden a la capacidad para responder a las exigencias individuales o sociales para realizar una tarea o, dicho de otra forma, corresponden a la capacidad de articular y movilizar recursos aprendidos –saberes– con vistas a un desempeño de excelencia. Las competencias se expresan en la acción y suponen la movilización de conocimientos, habilidades y actitudes que la persona ha aprendido en contextos educativos formales e informales".*

2.4 Desarrollo de la Unidad Didáctica

La U.D. se organiza en torno a ocho (8) actividades sugeridas de enseñanza-aprendizaje-evaluación, que incluyen los elementos necesarios para contribuir al logro de los objetivos (O.F.) y contenidos (C.M.O.), antes mencionados.

En la primera actividad –*Mi visión del cielo*–, se pretende motivar a los estudiantes al estudio de la temática propuesta en la U.D., junto con recoger información acerca de las *estructuras de acogida* (Hallwachs, 1975, citado por Jorba y Casellas, 1997, p. 38) de los estudiantes respecto de los contenidos de la U.D. Esta actividad debe ser complementada por el profesor con alguna actividad que permita comunicar los objetivos de la U.D., y evaluar la apropiación de ellos por parte de los alumnos(as).

En la segunda actividad –*Concepciones del mundo*–, se pretende tratar con los estudiantes el tema "historia y modelos del sistema solar y el universo", requisito necesario para la comprensión de las leyes de Kepler. Para ello, se escoge el texto de Claro (2004), ya que es un texto que presenta los contenidos históricos –desde el punto de vista de la integración–, en continuidad con los contenidos fundamentales propiamente científicos. Este texto puede ser clasificado como una reconstrucción histórica, ya que posee una narración simplificada a partir de fuentes primarias y secundarias, y posee un propósito definido de antemano; según palabras del propio autor: *"...mi esperanza es que una lectura completa del libro muestre un panorama de la manera como los físicos interpretamos hoy el mundo..."*. Además, el libro se encuentra escrito en un lenguaje sencillo, ameno y cotidiano, pero riguroso a la vez, con toda la formalidad y contenidos necesarios para el tema mencionado. Se sugiere al profesor la lectura completa del capítulo I de este libro previo a la realización de esta actividad.

En la tercera actividad –*¿Qué sé sobre Kepler y su época?*–, se aplica un cuestionario KPSI (Knowledge and Prior Study Inventory) (Young y Tamir, 1977, citados por Jorba y Casellas, 1997, p. 43), buscando obtener información sobre el grado de conocimiento que el alumno(a) piensa que posee, en relación a los contenidos que se le proponen en la U.D. Se aconseja inmediatamente después de su aplicación, invitar a los estudiantes a una puesta en común y discusión de los resultados obtenidos y las representaciones asociadas a dichos resultados.

En la cuarta actividad –*La concepción del mundo de Kepler*–, se busca, a través de extractos de una carta escrita por Galileo –a propósito de una de las obras de Kepler– y la posterior respuesta de éste al primero, establecer a qué concepción del mundo adscribían dichos personajes, y reflexionar sobre aspectos relativos al quehacer de los científicos y a la construcción del conocimiento científico.

En la quinta actividad –*¿Quién fue Kepler?*–, se busca contribuir a que los estudiantes comprendan la ciencia como una actividad humana. Se presentan un video y un texto que resaltan aspectos generalmente poco referidos de la biografía de Kepler y cómo ellos se relacionaron con su quehacer y con la evolución del conocimiento científico. En palabras del autor del texto referido –el científico, Stephen Hawking– *"...refleja adecuadamente como la ciencia, y de hecho el conjunto de la civilización, consiste en una serie de pequeños progresos, cada uno de los cuales se alza sobre los alcanzados anteriormente...".* Se sugiere al profesor la lectura completa del texto, acerca de la vida y obra de Kepler contenidos en el libro "A Hombros de Gigantes. Las grandes obras de la Física y la Astronomía" (2003), previo a la realización de la actividad.

En la sexta actividad –*Kepler contra el círculo*–, se pretende tratar con los alumnos el tema de la primera y la segunda ley de Kepler. Para ello, se escoge el texto de Moledo (1994), ya que es un texto que presenta, al igual que el referido en la segunda actividad, los contenidos históricos –desde el punto de vista de la integración–, en continuidad con los contenidos fundamentales propiamente científicos. Este texto también puede ser clasificado como una reconstrucción histórica, ya que posee una narración simplificada a partir de fuentes primarias y secundarias, y posee un propósito definido de antemano; según palabras del propio autor: *"...Aquí te propongo recorrer ese universo inagotable y vivir esa aventura. No hay nada que pueda asustar, nada que no puedas entender. Porque además de ser una aventura, y una aventura estética, la ciencia es una aventura tuya...".* Además, este texto presenta un lenguaje cotidiano y ameno, incluso poético, pero de una complejidad mayor que los anteriores (en su vocabulario principalmente). Esto último, permite trabajar aspectos más elaborados de comprensión lectora, e incorporar nuevos términos al vocabulario de los estudiantes.

En la séptima actividad –*La tercera ley de Kepler*–, se busca que los estudiantes "descubran", utilizando recursos TIC, la tercera ley de Kepler, y apliquen su "descubrimiento" a una situación problema. Junto a lo anterior, se promueve la comparación de las condiciones en que la ciencia se desarrolla en la actualidad, con aquellas en las que se desarrollaba en la época de Kepler.

En la octava y última actividad –*Síntesis de la unidad*–, se sugieren actividades que buscan lograr la estructuración y aplicación de los contenidos de la Unidad Didáctica Para ello se proponen actividades que contribuyen a: sistematizar lo aprendido, reconocer las posibilidades que ofrecen los aprendizajes logrados, aplicar los aprendizajes en la interpretación de la realidad, reconocer su utilidad y significancia, y saber su uso.

2.5 Actividades de enseñanza, aprendizaje y evaluación

ACTIVIDAD 1
Mi Visión del Cielo

Seguramente has observado en alguna oportunidad el cielo nocturno y te has preguntado... ¿qué son aquellos puntos luminosos que observamos sobre el fondo oscuro? El cielo nocturno incluso ha sido inspiración de poetas...

> *"Puedo escribir los versos más tristes esta noche.*
> *Escribir por ejemplo: 'La noche está estrellada*
> *Y tiritan, azules, los astros a lo lejos'."*
>
> Pablo Neruda

Tomando en cuenta tu experiencia con el cielo nocturno y el conocimiento que posees, responde a las siguientes preguntas:

- ¿Qué es lo que observamos al mirar el cielo nocturno?
- ¿Qué nombres reciben esos puntos luminosos que observas?
- ¿Cómo diferencias visualmente un planeta de una estrella?
- ¿Cómo es nuestro sistema solar? ¿Cómo puedes comprobarlo?
- ¿Cuántos y cuáles planetas existen actualmente en nuestro sistema solar?
- ¿Podrán existir otros "sistemas solares"? ¿Cómo podrías saberlo?

Compara y discute tus respuestas con otros compañeros(as).

Para finalizar esta actividad, veremos una animación en video que muestra una leyenda apache, acerca del origen de "esos puntos luminosos en el cielo".

Si quieres rever este video en tu casa, éste se encuentra disponible en *YouTube* (www.youtube.com), búscalo como "*Hugh Spanish Subs"*.

ACTIVIDAD 2
Concepciones del Mundo

Históricamente han existido múltiples concepciones del mundo. Lee con atención el siguiente texto que te entregará información acerca de algunas de las concepciones del mundo, que han existido a lo largo de la historia.

"...A pesar de las enseñanzas de Aristarco y Eratóstenes, la creencia predominante entre los griegos era que la Luna, el Sol y los demás astros que pueblan el cielo giraban sobre esferas perfectas en torno de la Tierra, el centro absoluto e inmóvil del Universo. La Luna sobre la esfera más cercana, luego Mercurio, Venus, el Sol, Marte, Júpiter y Saturno, este último seguido de las estrellas fijas. Finalmente el inmóvil primum mobile (Dios), la razón primera que alentaba el movimiento armónico de todo este esférico concierto celestial.

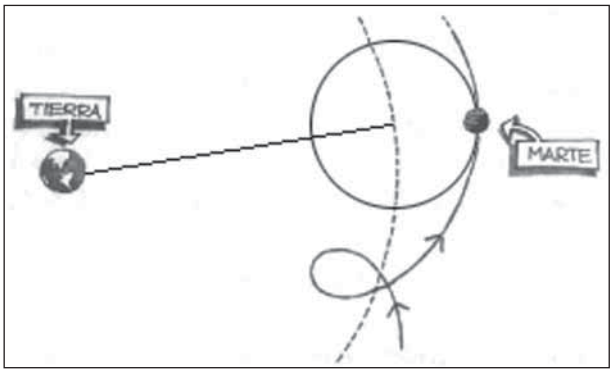
Es la concepción geocéntrica del cosmos, sistematizada en la cosmología aristotélica y elaborada en la tradición analítica del pensamiento griego. Constituyó el paradigma cosmológico que dominó imperturbado al Viejo Mundo hasta el siglo XVI. Lo conocemos con todo detalle gracias a Claudius Ptolemaeus (Ptolomeo) quien, en el siglo II, escribió una monumental obra enciclopédica de astronomía. Su nombre original La Colección Matemática cambió luego a El Gran Astrónomo, para distinguirla de un conjunto de textos de otros personajes, como Euclides y Menelaus, agrupados bajo el título El Pequeño Astrónomo. En el siglo IX, los árabes la llamaron finalmente como la conocemos hoy, Almagest, o El gran tratado. Consta de trece volúmenes que tratan del sistema geocéntrico, los planetas, el Sol y las estrellas fijas, de los eclipses, de geometría y trigonometría, de la construcción de instrumentos y observatorios astronómicos.

Exhausta con la contundencia del Almagest y anestesiada por las corrientes predominantes en la Edad Media, la astronomía se durmió en Occidente por catorce siglos para despertar luego sobresaltada con una osada proposición de Nicolaus Koperlingk de Thorn (Copérnico). Este hombre, estudioso de teología, filosofía y astronomía, propuso un Universo centrado en el Sol, con los planetas describiendo círculos perfectos en torno a él, ya que ante toda falta de uniformidad «el intelecto retrocede con horror». Se iniciaba así la llamada "revolución Copernicana", pero sin su gestor. Copérnico publicó sus ideas en 1543. Según una carta de la época, sin embargo, «... vio su obra llevada a término precisamente el día de su muerte». Su trabajo se titula, "De Revolutionibus Orbium

Coelestium", ("Sobre la Revolución de los Objetos Celestes"), *escondido presagio de la magnitud de la revolución conceptual a la que dio origen.*

Al publicar sus convicciones, Copérnico fue fiel a dos principios que orientan el avance de la ciencia. Uno, que si vamos a preguntarnos sobre los objetos en el cielo, lo primero es mirar hacia arriba y ver qué nos dice la observación de lo que allí hay. Podemos imaginar o discurrir acerca de lo que no es fácil o posible de observar. Sin embargo, si el comportamiento imaginado contradice lo que se observa, debe ser abandonado. Es el principio de sometimiento al fenómeno, a lo que ocurre y puede medirse: el comportamiento de la naturaleza, si uno quiere conocerla, siempre manda.

El otro principio es el de simplicidad: de dos explicaciones, la más simple es siempre la mejor. Pero no tan simple que viole el primer principio. Einstein dice: «Todo debe ser lo más simple posible, pero no más simple». Al respecto, una primera conclusión a que se puede llegar luego de mirar el cielo, es que los astros están todos fijos sobre una esfera transparente, como pintas sobre un globo de cristal, que gira una vez por día en torno a la Tierra. Demasiado simple. Un poco de observación muestra que el Sol, la Luna y los siete planetas más visibles se mueven sobre el fondo estelar. La primera corrección al superficial modelo de esfera única agrega entonces una esfera por cada uno de esos astros: una para el Sol, una para la Luna y una para cada uno de los siete planetas más brillantes. El modelo de Universo se parece entonces a una gran cebolla de capas móviles, con la Tierra al centro.



Una observación aún más fina muestra, sin embargo, que los planetas describen órbitas que parecen rizos en el cielo. ¿Cómo conciliarla con el modelo de simples esferas centradas en la Tierra? Ptolomeo logró

explicar el movimiento rizado en base a pequeñas órbitas circulares en torno de otras más grandes. Círculos que giran en torno a círculos. Era una explicación complicada, sólo para expertos en geometría esférica.

Copérnico, en cambio, advirtió que, centrando las esferas en el Sol, se podía explicar lo mismo manteniendo la simplicidad, al costo, eso sí, de abandonar el postulado de la inmovilidad de la Tierra. En su modelo, llamado heliocéntrico (helios en griego significa Sol), sólo la Luna gira en torno de la Tierra, mientras ésta rota en torno a un eje y en torno al Sol, como lo hacen los demás planetas..." (Claro, 2004, p. 22-24)

- Anota aquellas palabras que no comprendas y busca su significado en un diccionario (Se sugiere el diccionario en línea de la R.A.E.: www.rae.es).
- De acuerdo al texto, representa mediante esquemas los modelos de Ptolomeo y de Copérnico.
- Escribe un resumen del texto leído.
- Realiza una pequeña línea de tiempo con los hechos y personajes que aparecen en el texto.
- Investiga y discute con otros compañeros(as), ¿por qué transcurrió tanto tiempo (más de 18 siglos) para que las ideas de Aristarco de Samos, acerca de que la Tierra gira en torno al Sol, fueran aceptadas?, ¿qué cambió en ese lapso de tiempo que hizo que finalmente se aceptaran las ideas heliocéntricas promulgadas por Copérnico?
- Investiga y discute con otros compañeros(as), ¿qué visiones respecto del mundo y el universo tenían las iglesias luterana y católica, en la época que le correspondió vivir a Copérnico?, ¿cómo influyeron esas visiones en la obra de Copérnico?
- Investiga y discute con otros compañeros(as), ¿por qué en 1616 la Iglesia Católica incluyó el libro de Copérnico en la lista de libros prohibidos?

A modo de síntesis, veremos el siguiente video –titulado *Das Weltbild des Nikolaus Kopernikus*– que complementa algunos aspectos ya discutidos acerca del modelo Copernicano. Después de ver este video aumenta y completa las respuestas que ya has dado en la actividad anterior.

Si quieres rever este video en tu casa, éste se encuentra disponible en *YouTube* o en otros portales de documentales en línea, búscalo como "*Genios e inventos: La concepción del mundo de Nicolás Copérnico*". https://www.youtube.com/watch?v=yhv0NmzLJ1U

ACTIVIDAD 3
¿Qué sé sobre Kepler y su Época?

Utilizando las categorías siguientes, marca con una X en el recuadro que corresponda a tu nivel de conocimiento, de acuerdo a lo preguntado:

Categorías:

1. Se lo podría explicar a mis compañeros.
2. Creo que lo sé.
3. No lo entiendo.
4. No lo sé.

Preguntas	1	2	3	4	Comentarios
¿Por qué es importante estudiar el trabajo científico de Kepler?					
¿En qué época le correspondió vivir a Kepler?					
¿Por qué fue reconocido Kepler en su época?					
¿Cuántos planetas se conocían en la época de Kepler?					
¿Cuántas son las leyes de Kepler?					
¿Qué dicen las leyes de Kepler?					
¿Son válidas actualmente las leyes de Kepler?					

ACTIVIDAD 4
La Concepción del Mundo de Kepler

Cuando llegó a manos de Galileo un ejemplar del libro *Mysterium cosmographicum* de Kepler, éste escribió a Kepler:

> *"...hace muchos años ya adopté la doctrina de Copérnico, y su punto de vista me permite explicar muchos fenómenos de la naturaleza que, por cierto, quedan sin explicación atendiendo a las hipótesis más corrientes. Yo he escrito muchos argumentos en apoyo de Copérnico, y he refutado el punto de vista opuesto, escritos éstos que, sin embargo, no me atreví hasta ahora a que viesen la luz pública, temeroso de la suerte que corrió*

> *el propio Copérnico, nuestro maestro, quien, aunque adquirió fama inmortal, es para una multitud infinita de otros (que tan grande es el número de necios) objeto de burla y escarnio..."* (Galileo, citado por Boido, 1996, p. 98-99).

Kepler respondió a esta carta escribiendo lo siguiente:

> "...*sería preferible que nos ayudásemos y que con nuestros comunes esfuerzos, empujáramos hacia su meta este carruaje que ya está en movimiento. Tú podrías ayudar a tus colegas dándoles la tranquilidad de tu acuerdo y la protección de tu autoridad. Porque no solo tus italianos se niegan a creer que están en movimiento porque no lo sienten; tampoco aquí, en Alemania, se hace uno popular sustentando tales opiniones. Pero existen argumentos que nos protegen de estas dificultades. ¡Ten fe, Galilei, y sigue adelante!..."* (Kepler, citado por Boido, 1996, p. 99).

De acuerdo a los textos presentados:

- ¿A qué concepción del mundo adherían Kepler y Galileo?
- ¿Por qué Galileo se manifiesta temeroso de hacer pública su defensa a la tesis copernicana?
- ¿Por qué Galileo escribe que existe aún "*una multitud infinita de otros*" que no creen en la tesis copernicana?
- ¿A qué argumentos se refiere Kepler cuando escribe "*existen argumentos que nos protegen de estas dificultades"*?
- ¿Qué te parece que Kepler le sugiera a Galileo que se ayuden mutuamente? ¿Crees que la cooperación es parte del trabajo de los científicos? ¿Podrías citar otros ejemplos –antiguos y actuales– donde ocurra esto?

Compara tus respuestas con las de otros compañeros(as).

ACTIVIDAD 5
¿Quién fue Kepler?

Revisa junto a tu profesor y compañeros el video "Tycho Brahe, Johannes Kepler and Planetary Motion", perteneciente a la serie "Great Moments in Science and Technology", disponible en *YouTube*.

A continuación, lee la siguiente biografía de Kepler y realiza junto a un compañero(a) las actividades que se proponen.

"...Johannes Kepler nació el 27 de diciembre de 1571 en la ciudad de Weil der Stadt, en Württemburg (en la actual Alemania). Su padre, Heinrich Kepler, fue, según Johannes, «un soldado inmoral, zafio y pendenciero» que abandonó a su familia en varias ocasiones para unirse a mercenarios que combatían contra el levantamiento protestante en Holanda, país en donde se cree que murió. El joven Johannes vivió con su madre, Katherine, en la taberna de su abuelo, donde fue puesto –pese a su precaria salud– a servir mesas desde edad muy temprana. Kepler era miope y padecía de doble visión, causada según se cree por un ataque casi mortal de viruela, también sufría problemas abdominales y tenía dedos deformes que, según su familia, limitaban al sacerdocio su potencial elección de carrera.

«Muy discutidora» y «de mal temperamento» fueron las palabras que el astrónomo utilizó para describir a su madre, aunque se convenció desde muy joven de que era así por culpa de su padre. Katherine había sido criada por una tía que practicaba la brujería y que fue quemada en la hoguera, por lo que Kepler no se sorprendió cuando años más tarde su madre se enfrentó a cargos similares. En 1577, ella mostró a su hijo el «gran cometa» que apareció aquel año en el cielo, momento que, según reconocería Kepler más adelante, constituyó una de las experiencias compartidas de recuerdo más perdurable.

A pesar de una niñez llena de dolor y ansiedad, Kepler estaba obviamente dotado, y se espabiló para conseguir una beca destinada a los chicos con recursos limitados que vivían en la provincia alemana de Suabia. Acudió a la escuela alemana de Leonberg antes de pasar a una escuela latina, donde adquirió el estilo de escribir en latín que posteriormente utilizaría en sus trabajos. Frágil y precoz, Kepler era vapuleado a menudo por sus compañeros de clase, quienes le consideraban un sabelotodo, hasta que, para escapar de tales tratos, pasó a los estudios religiosos.

En 1587, Kepler se matriculó en la universidad de Tubinga, donde estudió teología y filosofía. También se estableció como estudiante de matemáticas y astronomía, y se hizo ferviente partidario de la controvertida teoría heliocéntrica copernicana. Tan encendida era su defensa del modelo copernicano del Universo, que no era raro que se enzarzara en discusiones públicas sobre este tema. A pesar de su interés central en teología, cada vez se sentía más atraído por el encanto místico de un universo heliocéntrico. Aunque estaba a punto de graduarse en Tubinga en 1591 e ingresar en la facultad de teología de la universidad, una recomendación para un empleo de profesor de matemáticas y astronomía en la escuela protestante de Graz, en Austria, resultó irresistible. Así pues, a la edad de veintidós años, Kepler dejó la carrera sacerdotal para dedicarse al estudio de la ciencia, aunque nunca abandonaría su fe en el papel de Dios en la creación del universo.

En el siglo XVI la frontera entre astronomía y astrología era muy ambigua. Una de las obligaciones de Kepler como matemático en Graz era componer un calendario astrológico completo con predicciones, práctica muy común en aquel tiempo. Kepler estaba claramente motivado por el dinero adicional que le proporcionaba aquel empleo, y no podía sospechar la reacción del público cuando apareció su primer calendario. Predijo un invierno extraordinariamente frío y una incursión de los turcos, y cuando ambas predicciones se cumplieron, Kepler fue triunfalmente aclamado como profeta. A pesar de este clamor, nunca sintió mucho respeto por su trabajo en los almanaques anuales. Llamó a la astrología «hija pequeña y alocada de la astronomía» y despreció tanto el interés del público como las intenciones de los astrólogos. «Si alguna vez los astrólogos aciertan», escribió, «se debe atribuir a la suerte». Aun así, Kepler nunca dejó de acudir a la astrología cuando el dinero escaseaba, circunstancia frecuente en su vida, ni abandonó la esperanza de descubrir algo de ciencia verdadera en ella.

Un día, mientras daba una lección de geometría en Graz, Kepler tuvo una súbita revelación que le lanzó a un viaje apasionado y que cambiaría el curso de su vida. Se trataba, creyó él, de la llave secreta para la comprensión del Universo. En la pizarra de la clase dibujó un triángulo equilátero dentro de un círculo, y otro círculo dentro del triángulo. Se le ocurrió que la razón de los círculos indicaría la razón de las órbitas de Saturno y de Júpiter. Inspirado por esta revelación, supuso que los seis planetas conocidos en aquel tiempo estaban dispuestos alrededor del sol de tal manera que ciertas figuras geométricas ajustaran perfectamente

entre ellas. Inicialmente ensayó esta hipótesis sin éxito, utilizando figuras planas bidimensionales como el pentágono, el cuadrado y el triángulo. Entonces acudió a los sólidos pitagóricos, utilizados por los antiguos griegos, que descubrieron que tan sólo cinco poliedros podían ser construidos mediante figuras geométricas regulares. Para Kepler, aquello explicaba por qué sólo podía haber seis planetas (Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter y Saturno) con cinco espacios entre ellos, y por qué sus separaciones no eran uniformes. Esta teoría geométrica sobre las órbitas y distancias planetarias impulsó a Kepler a redactar el Misterio del cosmos (Mysterium Cosmographicum), publicado en 1596. Tardó un año en escribirlo, y aunque el esquema resultaba razonablemente preciso, estaba muy seguro de que sus teorías se demostrarían finalmente correctas:

«Nunca podré expresar con palabras cuán intenso fue mi placer al efectuar este descubrimiento. Ya no lamenté el tiempo que me había costado. Consumía días y noches en cálculos, para comprobar si esta idea concordaba con las órbitas copernicanas, o si mi alegría sería llevada por el viento. Al cabo de unos pocos días todo encajaba, y vi cómo un planeta tras otro se situaban con precisión en su lugar».

Kepler pasó el resto de su vida intentando obtener la demostración matemática que justificara su teoría y sus observaciones científicas. Misterio del cosmos fue la primera obra decididamente copernicana publicada desde el tratado de Copérnico De revolutionibus. Como astrónomo y como teólogo, Kepler estaba determinado a comprender cómo y por qué Dios diseñó el universo. Defender un sistema heliocéntrico tenía serias implicaciones religiosas, pero Kepler mantuvo que la centralidad del Sol era clave para los designios de Dios, ya que mantenía los planetas ordenados y en movimiento. En este sentido, Kepler rompió con el sistema heliostático de Copérnico de un Sol «próximo» al centro, al colocarlo directamente en el centro del sistema.

Actualmente, la idea de los poliedros de Kepler parece insostenible, pero aunque la premisa del Misterio del cosmos era errónea, sus conclusiones resultaban sorprendentemente precisas y decisivas y fueron esenciales para influir en el curso de la ciencia moderna. Cuando el libro fue publicado. Kepler envió un ejemplar a Galileo, urgiéndole a «creer y dar un salto hacia delante», pero el astrónomo italiano rechazó el trabajo debido a su evidente carácter especulativo. Tycho Brahe, en cambio, se sintió inmediatamente intrigado. El trabajo de Kepler le pareció nuevo y excitante, y escribió una crítica detallada en apoyo del libro. Esta reacción

al Misterio del cosmos, escribiría Kepler posteriormente, cambió el curso de toda su vida.

En 1597, otro suceso iba a imprimir un nuevo giro a su existencia: Kepler se enamoró de Bárbara Muller, la hija mayor de un rico propietario de molinos. Se casaron el 27 de abril de aquel año, bajo una constelación desfavorable, como el astrónomo anotaría posteriormente en su diario. Y una vez más emergió su naturaleza profética, ya que la relación y el matrimonio se disolvieron. Los dos primeros hijos murieron a edad muy temprana, Kepler, enloquecido de dolor, se sumergió en su trabajo para distraerse. La esposa no comprendió sus investigaciones. Aunque el matrimonio duró catorce años, hasta la muerte de ella por tifus en 1611, aparece descrita como «gorda, simplona y confusa» en los discursos de Kepler.

En septiembre de 1598, el archiduque católico de Graz, que había recibido el encargo de eliminar de Austria el protestantismo, ordenó que Kepler y otros luteranos abandonaran la ciudad. Tras una visita al castillo Benatky de Tycho Brahe en Praga, Kepler fue invitado por el rico astrónomo danés a quedarse allí y trabajar en sus investigaciones. Kepler recelaba de Brahe, incluso antes de conocerle personalmente. «Mi opinión de Tycho es que es superlativamente rico, pero que no sabe cómo utilizar adecuadamente sus riquezas, tal como ocurre con la mayoría de la gente rica», escribió. «Por lo tanto, debemos tratar de arrancarle sus riquezas».

Si a la relación con su mujer le faltaba complejidad, Kepler encontraría toda la que quisiera cuando fue contratado como investigador por el aristocrático Brahe. Al principio, éste le trató como un subalterno, controlando minuciosamente sus tareas y sin darle demasiado acceso a los datos observacionales. Kepler anhelaba ser considerado como un igual y tener cierta independencia, pero el receloso Brahe quería utilizarle tan sólo para establecer su propio modelo del sistema solar –un modelo no copernicano– que Kepler no soportaba.

Kepler se sentía inmensamente frustrado. Brahe había hecho acopio de una gran riqueza de datos experimentales, pero carecía de los instrumentos matemáticos para comprenderlos plenamente. Finalmente, quizá para pacificar a su inquieto ayudante, Brahe le encargó que estudiara la órbita de Marte, que durante algún tiempo había confundido al astrónomo danés porque parecía ser la menos circular. Al principio, Kepler pensó que podría resolver el problema en ocho días, pero éste le ocupó más de ocho años. Por difícil que resultara la investigación, no

dejó de tener sus recompensas, ya que tal trabajo le llevó a descubrir que la órbita de Marte correspondía con precisión a una elipse, así como a formular sus dos primeras «leyes planetarias», que publicó en 1609 en La nueva astronomía.

Un año y medio después de haber empezado su colaboración con Brahe, el astrónomo danés se indispuso durante una cena y murió pocos días después de una infección de la vejiga de la orina. Kepler ocupó la plaza de Matemático Imperial y quedó libre para explorar la teoría planetaria sin estar sometido a la vigilancia puntillosa de Tycho Brahe. Consciente de su oportunidad, Kepler se apropió inmediatamente de los anhelados datos de Brahe, antes de que pasaran al control de sus herederos. «Confieso que cuando Tycho murió», escribió más tarde, «me aproveché rápidamente de la ausencia, o falta de circunspección, de los herederos, y tomé bajo mi control las observaciones, quizá usurpándolas». El resultado fueron las Tablas Rudolfinas de Kepler, una compilación de los datos de treinta años de las observaciones de Brahe. Para ser honestos, hemos de decir que en su lecho de muerte Brahe encargó a Kepler que completara las tablas; pero Kepler no lo hizo según las hipótesis del modelo de Tycho, como Brahe esperaba, sino que utilizó los datos, que incluían cálculos con logaritmos que él mismo había desarrollado, para predecir las posiciones planetarias. Logró predecir tránsitos del Sol por Mercurio y Venus, aunque no vivió lo suficiente para verlos. Sin embargo, Kepler no publicó las Tablas Rudolfinas hasta 1627, porque los datos que iba descubriendo le lanzaban constantemente en direcciones muy diversas.

Tras la muerte de Brahe, Kepler observó una nova, que posteriormente fue conocida como «nova de Kepler», y también experimentó en teorías ópticas. Aunque modernamente los científicos y los eruditos consideran sus trabajos en óptica como menores en comparación con sus éxitos en astronomía y matemáticas, lo cierto es que la publicación en 1611 de su libro Dioptrices cambió el curso de la óptica.

En 1605, Kepler anunció su primera y segunda leyes. Publicó ambas leyes en 1609 en su libro Nueva astronomía (Astronomia nova).

A pesar de su cargo como Matemático Imperial y de ser un distinguido científico a quien Galileo pedía opinión acerca de sus nuevos descubrimientos con telescopio, Kepler no consiguió asegurarse una existencia confortable. Las revueltas religiosas en Praga pusieron en peligro su nueva patria de adopción, y en 1611 fallecieron su mujer y su hijo predilecto. Kep1er fue autorizado, bajo exención, a regresar a Linz, donde en 1613 se

casó con Susanna Reuttinger, una huérfana de veinticuatro años que le daría siete hijos, sólo dos de los cuales llegaron a alcanzar la edad adulta. Fue en aquella época cuando la madre de Kepler fue acusada de brujería y él, pese a hallarse inmerso en una agitada situación personal, se vio obligado a defenderla de estos cargos para evitar que fuera llevada a la hoguera. Katherine fue encarcelada y torturada, pero su hijo consiguió obtener su exculpación y su puesta en libertad.

Debido a estas contrariedades, el regreso de Kepler a Linz no fue inicialmente un período productivo. Desesperado, apartó su atención de las tablas y empezó a trabajar en Las armonías del mundo (Harmonice Mundi). Kepler terminó Las armonías del mundo el 27 de mayo de 1618. En esta serie de cinco libros, extendió su teoría de la armonía a la música, la astrología, la geometría y la astronomía. La serie incluyó su tercera ley de los movimientos planetarios.

Kepler creía que había descubierto la lógica de Dios en la creación del Universo, y no logró ocultar su éxtasis. En el libro quinto de Las armonías del mundo escribió:

«Me atrevo a confesar con franqueza que he robado los vasos de oro de los egipcios para construir un tabernáculo para mi Dios muy lejos de los límites de Egipto. Si me perdonáis por ello, me alegraré; si me lo reprocháis, lo soportaré. La suerte está echada, y escribo el libro para ser leído ahora o en la posteridad, no importa cuándo. Puede esperar más de un siglo a su lector, tal como Dios mismo ha esperado seis mil años para encontrar mi testimonio».

La guerra de los Treinta Años, que, iniciada en 1618, diezmó las tierras austríacas y alemanas, obligó a Kepler a abandonar Linz en 1626. Al final, se estableció en la ciudad de Sagan, en Silesia. Allí intentó terminar lo que podríamos describir como una novela de ciencia-ficción, en la que había jugueteado durante años, con ciertos perjuicios para su madre durante el juicio por brujería. Sueño de la Luna (Somnium seu Astronomia Lunari) es un diálogo imaginario con un «demonio» conocedor del Universo que explica al protagonista cómo podría viajar a la Luna y que fue descubierto y presentado como prueba durante el juicio contra Katherine. Kepler tuvo que dedicar muchas energías a defender que el trabajo era pura ficción y que el demonio que en él aparecía era un mero artificio literario. El libro es único, no sólo porque se avanzó a su tiempo en fantasía, sino también porque constituía una especie de tratado en apoyo de la teoría copernicana.

En 1630, a los cincuenta y ocho años, Kepler se halló de nuevo en apuros financieros. Partió hacia Ratisbona, donde esperaba cobrar los intereses de algunos bonos que poseía y algún dinero que le debían. Sin embargo, pocos días después de su llegada tuvo un acceso de fiebre y murió el 15 de noviembre. Aunque nunca alcanzó entre el público la fama de Galileo, Kepler produjo un corpus que resultó extraordinariamente útil para los astrónomos profesionales que, como Newton, se sumergieron en los detalles y en la precisión de su ciencia. Johannes Kepler fue un hombre enamorado del orden cósmico y la armonía estética, y todo lo que descubrió estuvo inextricablemente entrelazado con su visión de Dios. En su epitafio, que compuso él mismo, dice: «Medí los cielos; ahora mediré las sombras de la tierra. Mi alma era del cielo, pero la sombra de mi cuerpo reposa aquí».” (A hombros de gigantes. Las grandes obras de la Física y la Astronomía, 2003, p. 555-560).

1. Anoten aquellas palabras que no comprendan y busquen su significado en un diccionario (Se sugiere el diccionario en línea de la R.A.E.: www.rae.es).
2. Después de leer parte de su biografía, ¿cómo describirían a Johannes Kepler?
3. ¿Hasta qué planeta conoció Kepler? ¿Por qué?
4. ¿De dónde obtuvo Kepler los datos que usó para formular sus leyes?
5. ¿Por qué fue reconocido principalmente Kepler en su época, por su trabajo como astrónomo o como astrólogo?
6. ¿Cómo fue la vida de Kepler, dirían que fácil o difícil? ¿Por qué?
7. ¿Han observado en su clase una situación parecida a la que le correspondió vivir a Kepler, respecto de ser molestado por sus compañeros por “sabelotodo”? ¿Qué opinión te merecen esos hechos (tanto en Kepler como en tu clase)? ¿Qué se podría hacer para evitarlos?
8. ¿Cómo influyó el período histórico en que le correspondió vivir a Kepler en su trabajo científico?
9. ¿Qué rol jugó Ticho Brahe en la vida de Kepler y en su trabajo científico?, ¿cómo fue la relación entre ambos?, ¿existió un reconocimiento mutuo?

ACTIVIDAD 6
Kepler Contra el Círculo

Lee el siguiente texto que nos habla sobre la primera y la segunda leyes de Kepler, y realiza las actividades propuestas a continuación.

"...La historia de Johannes Kepler (1571-1630) es muy curiosa. Fue una combinación de genio medieval y espíritu renacentista, que mezcló la nueva actitud científica del siglo XVII y las brumas místicas y astrológicas de los siglos precedentes. Y lo hizo con éxito: aunque menos popular que Galileo, y menos conocido que Copérnico, junto con ellos, Kepler es uno de los tres gigantes en cuyos hombros Newton decía haberse montado para ver más lejos, y las leyes con que describió el funcionamiento del sistema solar fueron la piedra sobre la cual el sistema heliocéntrico edificó su triunfo. Porque la verdad es que el sistema propuesto por Copérnico en 1543, en que el Sol, y no la Tierra, (como en el viejo sistema de Tolomeo) era el centro del universo, ganaba adeptos día a día, era nuevo, era inteligente, era simpático, pero le faltaba swing. Por empezar, seguía siendo muy complicado. Copérnico hizo girar su sistema no exactamente alrededor del Sol, sino alrededor del centro de la órbita de la Tierra, que no es lo mismo (ésta era una vieja historia, un poco tramposa, que se arrastraba desde la antigüedad: las esferas de Tolomeo tampoco giraban exactamente alrededor de la Tierra, sino de un punto ficticio llamado ecuante). Además, para que las órbitas coincidieran con las observaciones, Copérnico se había visto obligado a agregar esferas dentro de esferas de indudable factura tolemaica. Todo lo cual ensuciaba y quitaba prolijidad a un sistema que, si bien tenía la pujanza que caracteriza a las nuevas ideas, carecía de la eficiencia necesaria para imponerse de una vez por todas.

Una de las órbitas más problemáticas era la del planeta Marte, y Kepler, que había sucedido en 1601 al gran Tycho Brahe (el más grande observador astronómico de la época anterior al telescopio) en el puesto de Matemático Imperial, emprendió la tarea de determinarla de manera exacta. Cuando tras interminables cálculos (ocupan novecientas páginas de letra menuda) llegó a determinar el radio de la órbita marciana, hete aquí que encontró un par de observaciones que no encajaban. La diferencia era relativamente pequeña: ocho minutos de arco. Y aquí se produce uno de esos puntos de bifurcación en la historia de la ciencia. Kepler podría haber pensado que las observaciones estaban mal, pero en vez de hacerlo, llegó a la conclusión de que la teoría estaba mal: había un error, y el error consistía en suponer que las órbitas eran circulares.

Es muy difícil, desde nuestra mentalidad moderna, comprender el esfuerzo mental necesario para abandonar una de las convicciones más arraigadas de la astronomía y de la filosofía en general. El círculo era la forma perfecta, era el símbolo de la divinidad, era el centro de la cosmogonía, era la figura ideal para mantener en marcha los cielos. Dejar el círculo (aunque para la época ya se hubiera convertido en un círculo vicioso) y las órbitas circulares era quedarse a ciegas: significaba lanzarse al vacío. Además, si no era un círculo, ¿qué podía ser? Kepler tanteó: probó con un círculo estirado (un óvalo) y cotejó dificultosamente las observaciones. Nada. No había caso. No encajaban. En 1603 escribió que «si la forma de la órbita fuera una elipse perfecta, podrían encontrarse todas las respuestas en Arquímedes y Apolonio», y un año y medio más tarde, suponía que la verdadera forma estaba entre la oval y la circular, algo intermedio, «exactamente como si la órbita de Marte fuera una elipse perfecta. Pero respecto a eso, aún no he investigado nada». Finalmente, tras estrellarse una y otra vez contra el óvalo, lo abandonó. Y allí cayó la moneda: cuando reemplazó los óvalos por elipses, los datos se acomodaron: «¡Oh, qué estúpido he sido!», escribió. En 1609 publicó su obra maestra, Astronomía Nueva, donde se enuncia su primera ley, que reemplaza las órbitas circulares, de una vez para siempre, por órbitas elípticas, con el Sol en uno de los focos. La Primera Ley de Kepler (junto a la segunda, que establece que los radios vectores de los planetas barren áreas iguales en tiempos iguales) completa el sistema de Copérnico enunciado cincuenta años antes, y lo dota de elegancia y simplicidad. Faltaba explicar por qué ocurría todo eso, qué era lo que obligaba a los planetas a moverse en órbitas elípticas y todo lo demás, pero en ese terreno, los esfuerzos de Kepler fueron vanos (como habían sido los de Copérnico y lo serían los de Descartes). La pelota de la historia allí se le escapa, rueda suavemente y se coloca lista, incitante, a los pies de Newton..." (Moledo, 1994, p. 84-85).

1. Anoten aquellas palabras que no comprendan y busquen su significado en un diccionario (Se sugiere el diccionario en línea de la R.A.E.: www.rae.es).
2. Expliquen qué es una elipse y cómo está compuesta.
3. Investiguen cómo se puede trazar una elipse de manera sencilla.
4. Formulen la primera y la segunda ley de Kepler como enunciados simples.
5. ¿Por qué fue difícil para Kepler abandonar la idea de que la forma de las órbitas era circular?

Como actividad de síntesis, analiza y revisa, junto a tu profesor y tus compañeros, las siguientes direcciones web, las cuales contienen *applets* que ilustran la primera y la segunda ley de Kepler, respectivamente, para todos los planetas del Sistema Solar:

1. http://www.walter-fendt.de/ph14s/keplerlaw1_s.htm
2. http://www.walter-fendt.de/ph14s/keplerlaw2_s.htm

ACTIVIDAD 7
La Tercera Ley de Kepler

Propósito:

"Descubrir" la tercera ley de Kepler del movimiento planetario, usando un método de aproximaciones sucesivas en el computador.

Equipo y materiales necesarios

Computador personal con un programa de "hoja de cálculo".

Comentario:

Imagina que eres un joven astrónomo. Con miras a obtener tu doctorado, vas a investigar el movimiento planetario. Estás investigando la relación entre el tiempo que tarda un planeta en recorrer su órbita alrededor del Sol (el período), y el radio promedio de la órbita del planeta alrededor del Sol. Valiéndote de un telescopio, has compilado los datos planetarios que aparecen en la tabla A.

Si no hubieses dispuesto de un telescopio, ¿hasta qué planeta podrías haber observado?

Tienes acceso a un programa que te permite trazar fácilmente una gráfica de los datos en un computador. También puedes trazar gráficas de un gran número de relaciones diferentes entre las variables. Puedes trazar la gráfica del periodo T contra el radio R, de T contra R^2, de T contra R^3, y así sucesivamente. Con la misma facilidad puedes trazar la gráfica de R contra T, R contra T^2, y R contra T^3.

TABLA A

Planeta	**Período** (Años)	**Radio Promedio** (UA)
MERCURIO	0.241	0.39
VENUS	0.615	0.72
TIERRA	1.00	1.00
MARTE	1.88	1.52
JÚPITER	11.8	5.20
SATURNO	29.5	9.54
URANO	84.0	19.18
NEPTUNO	165	30.06

Analizando la tabla anterior, ¿a qué equivale una Unidad Astronómica (UA)?, ¿a qué equivale un año?, ¿por qué se habla de *radio promedio*?, ¿por qué Plutón no se incluye?

Procedimiento:

Paso 1
Sigue las instrucciones del programa de "hoja de cálculo". Se trata de trazar una gráfica en la que intervengan T y R y que sea una línea recta. Una relación lineal indica que las dos variables graficadas son directamente proporcionales entre sí. Pruebe graficar T contra R, T contra R^2, T contra R^3, R contra T, R contra T^2 y R contra T^3, para ver si alguna de estas relaciones forma una línea recta al graficarse.

Paso 2
Si la relación entre T y R no puede descubrirse modificando el exponente de una sola variable a la vez, trata de modificar los exponentes de las dos variables al mismo tiempo. Si encuentras la relación exacta entre T y R durante este experimento, podrás felicitarte; Johannes Kepler (1571-1630), tuvo que dedicar diez años de penosos esfuerzos para descubrir esa relación. ¡En el siglo XVII no había computadores!

Análisis:

1. ¿Descubriste una relación lineal entre alguna potencia de T y alguna potencia de R, usando el programa? ¿Qué potencias de T y de R producen una recta?
2. Imprime la gráfica que más se aproxime a una recta.

3. ¿Qué sistema de referencia se utilizó para definir las unidades de medida *año* y *UA*? ¿Por qué se utilizó dicho sistema de referencia?
4. Si comparas tu trabajo en esta experiencia con el trabajo realizado por Kepler para determinar su tercera ley, ¿qué similitudes y qué diferencias podrías señalar entre ambos?
5. De acuerdo a lo aprendido en esta experiencia, formula la tercera ley de Kepler. Compara tu redacción con la de otros compañeros(as).
6. "*...Kepler concluyó que la velocidad del planeta debe ser inversamente proporcional a la distancia que lo separa del Sol, un enunciado aproximadamente correcto. De esta ley de velocidad obtuvo otra formulación: 'el segmento que une al Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales'. Durante toda su vida, Kepler utilizó uno u otro enunciado como si fuesen equivalentes. No lo son...*" (Boido, 1996, p. 112).

   Explica por qué el autor del texto anterior afirma que los enunciados utilizados por Kepler indistintamente, no son equivalentes. ¿Cuál de los dos enunciados conduce a resultados más precisos?

7. Supón que se encuentra un nuevo planeta del sistema solar entre las órbitas de Marte y Júpiter. Calcula su período orbital, sabiendo que el radio medio de la órbita de este nuevo planeta, es de dos unidades astronómicas.

Síntesis:

Como actividad de síntesis, analiza y revisa, junto a tu profesor y tus compañeros, la siguiente dirección web, la cual contiene un applet que ilustra la tercera ley de Kepler y además, contiene links de interés para su mejor comprensión:

http://teleformacion.edu.aytolacoruna.es/FISICA/document/fisicaInteractiva/gravitacion/kepler3/kepler3_indice.htm

ACTIVIDAD 8
Síntesis de la Unidad

1. Realiza un mapa conceptual con todos los conceptos aprendidos durante la unidad “las leyes de Kepler”.
2. Completa una tabla con los siguientes datos para cada uno de los planetas del sistema solar: nombre del planeta, medida del semi-eje mayor de la órbita, excentricidad de la órbita, medida del semi-eje menor de la órbita, medida de la distancia del afelio al sol, medida de la distancia del perihelio al sol, período orbital del planeta, rapidez lineal máxima del planeta al recorrer la órbita, rapidez lineal mínima del planeta al recorrer la órbita.
3. Explica cómo las leyes de Kepler ayudaron a comprender el fenómeno de los “rizos de Marte” en el cielo nocturno.
4. Desde el punto de vista histórico y científico, ¿por qué son (fueron) importantes las leyes de Kepler?
5. ¿Siguen siendo válidas las leyes de Kepler? Detalla –de acuerdo al conocimiento científico actual– cuáles son las limitaciones de las leyes de Kepler.
6. ¿Cómo cambió tu visión del sistema solar y del universo después de haber estudiado las leyes de Kepler? ¿Consideras importante el haberlas estudiado?, ¿por qué?
7. ¿Qué proyecto científico actual, recibe el nombre de Kepler en su honor? ¿Cuáles son los objetivos de este proyecto? ¿Quién lo dirige y financia? ¿Qué de nuevo sabemos como resultado de este proyecto?

Referencias bibliográficas

Adúriz-Bravo, A. (2005). *Una introducción a la naturaleza de la ciencia. La epistemología en la enseñanza de las ciencias naturales*. (1ª ed.) Buenos Aires, Argentina: Fondo de Cultura Económica.

Astolfi, J. P. (2001). *Conceptos clave en la didáctica de las disciplinas.* (1ª ed.) Serie Fundamentos N°17. Colección investigación y enseñanza. Sevilla, España: Díada Editora.

Boido, G. (1996). *Noticias del planeta Tierra. Galileo Galilei y la revolución científica.* (1ª ed.) Buenos Aires, Argentina: A-Z editora.

Claro, F. (2004). *A la sombra del asombro*. *El mundo visto por la física*. (5ª ed.) Santiago, Chile: Ediciones Andrés Bello.

Fernández, M. (2000). *Fundamentos históricos.* En: Perales, F., Cañal, P. (Ed.) Didáctica de las Ciencias Experimentales (pp. 65-84). Alcoy, España: Marfil.

Gribbin, J. (2005). *Historia de la ciencia. 1543-2001.* (1ª ed.) Barcelona, España: Crítica.

Hawking, S. (Ed.) (2003). *A hombros de gigantes. Las grandes obras de la Física y la Astronomía*. (2ª ed.). Barcelona, España: Crítica.

Jorba, J.; Casellas, E. (Ed.) (1997) *La regulación y la autorregulación de los aprendizajes*. Volumen I. Madrid, España: Síntesis.

Moledo, L. (1994). *De las tortugas a las estrellas. Una introducción a la ciencia.* (1ª ed.) Sao Paulo, Brasil: A-Z editora.

Sanmartí, N. (2002). *Didáctica de las ciencias en la educación secundaria obligatoria*. (1ª ed.) Madrid, España: Editorial Síntesis.

Capítulo 3

Mecânica Aristotélica Versus Galileana

Bianca de Quadros, Valderez Marina do Rosário Lima
João Batista Siqueira, João Bernardes da Rocha Filho

Conteúdo

- *Resumo*
- *Introdução*
- *Desenvolvimento da unidade didática*
- *Avaliação*
- *Apêndice*
- *Referências bibliográficas*

Resumo

Neste capítulo apresentamos uma unidade didática para o ensino da física dos movimentos e gravitação por meio de uma discussão entre as idéias propostas por Aristóteles e Galileu, salientando suas diferenças. Propomos estratégias didáticas e atividades experimentais para que sejam desenvolvidas pelos professores com seus estudantes. Este trabalho visa a contribuir com os educadores na elaboração de aulas referentes à queda livre e ao movimento de projéteis.

3.1 Introdução

Com o nascimento da filosofia, na Grécia pré-cristã, manifestou-se historicamente uma preocupação com o entendimento dos fenômenos naturais, cuja sistematização foi principalmente realizada por Aristóteles, reconhecido como o criador do método lógico de análise natural. Os filósofos foram importantes nesse período porque por meio de seus questionamentos a natureza mostrou-se passível de explicação e matematização.

Aristóteles de Estagira (384-322 a.C.) rompeu com o idealismo platônico, dando origem a diversas expressões utilizadas até hoje, como “energia”, “atributo”, “universal” e “categoria”, entre outras. Ele acreditava que “só a experiência traz conhecimento, que deve surgir do estudo da natureza”, e admitiu que a constituição fundamental da matéria envolvia a conjugação de quatro elementos básicos. Também acreditou na imortalidade da alma, propôs a teoria da geração espontânea, além de muitas outras idéias sobre a vida na Terra. No campo da física, Aristóteles fez observações sobre o movimento dos corpos, elaborando leis que perduraram e foram ensinadas por muitos séculos, até o fim da Idade Média. Seus pensamentos baseavam-se em silogismos lógicos, caracterizados por provirem de fatos naturais incontestáveis, que podiam ser visualizados com facilidade. Aristóteles também desenvolveu conceitos a respeito da queda livre dos corpos, que é uma particularização do movimento retilíneo acelerado.

Este filósofo afirmava que, se duas pedras de diferentes massas fossem largadas de uma mesma altura, haveria diferença no tempo de queda de ambas. Neste caso, aquela que possuísse a maior massa seria a primeira a atingir o solo (GEYMONAT, 1962). Esta afirmação manteve-se aceita sem contestação por muitos séculos, provavelmente porque não era uma atividade comum a realização de experimentos para comprovação de idéias científicas. As idéias de Aristóteles concordavam com o senso comum e não seriam desafiadas facilmente.

No final da Idade Média, o físico e astrônomo italiano Galileu Galilei introduziu na ciência o método experimental, modificando a forma como os cientistas trabalhavam com os fenômenos, que era, até então, principalmente discursiva,

centrada na reflexão. Em suas observações referentes ao movimento de queda dos corpos, Galilei notou que as idéias propostas por Aristóteles não estavam de acordo com o que ele verificava experimentalmente. Confiante de que as afirmações científicas poderiam ser confirmadas ou refutadas por meio da experimentação, é atribuída a ele a proposição do famoso experimento da Torre de Pisa, na qual teriam sido abandonadas duas esferas de pesos diferentes. Este experimento teria sido usado por Galilei na argumentação contra as idéias de Aristóteles, inaugurando a era da experiência como método científico válido. No entanto, vários historiadores da ciência negam que tal experimento tenha sido realizado, principalmente porque Galilei sabia que havia uma força atuando para retardar o movimento de queda dos corpos, que ele associou ao ar, e que este experimento, portanto, não produziria resultados favoráveis às suas proposições.

Naquela época, a influência da Igreja no pensamento científico era extrema, inclusive porque a própria cultura aristotélica sobreviveu à Idade Média principalmente nos mosteiros. Neste contexto, as proposições de Galileu, entre elas a teoria heliocêntrica, levaram-no aos tribunais da Santa Inquisição. Para evitar a pena máxima, o físico precisou renunciar a elas e, mesmo assim, foi condenado a passar o restante da sua vida em prisão domiciliar.

Assim, tanto pela importância histórica quanto pela utilidade cotidiana dos conhecimentos associados à queda dos corpos, é interessante que seja adequadamente trabalhada no contexto do ensino médio. Nesta unidade serão propostas atividades para melhor compreendê-la.

3.2 Desenvolvimiento da Unidade Didática

3.2.1 Retomada de conteúdo e exploração

a. Objetivos

Identificar os conhecimentos prévios dos estudantes, verificando as dificuldades de compreensão mais importantes e completando eventuais lacunas nos conteúdos relacionados ao movimento retilíneo e de queda livre.

b. Mapas conceituais individuais

Nesta etapa inicial propomos uma sondagem tanto das atitudes dos alunos em relação à Física, quanto de seus conhecimentos. Essa exploração servirá de auxílio para o professor, que terá a oportunidade de avaliar o nível de conhecimento da turma. Por meio dessa análise também será possível verificar quais estudantes apresentam maior dificuldade, devendo, portanto, receber uma atenção especial do orientador ao longo do trabalho (MOREIRA, M. A., BUCHWEITZ, B., 1987).

Sugerimos que esta etapa de exploração seja realizada com a ajuda de um mapa conceitual. Neste caso, é interessante que se proponha aos alunos a criação de um mapa sobre os conteúdos que precedem e fundamentam o estudo da queda livre dos corpos graves e que mais adiante serão importantes para a compreensão dos conceitos e leis dessa parte da mecânica. Estes conteúdos podem ser, dependendo do julgamento de conveniência do professor, Movimento Retilíneo Uniforme (MRU) e Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV). Este trabalho deve ser desenvolvido, preferencialmente, de forma individual, em um ambiente tranquilo, para que os estudantes possam manter a concentração e refletir sobre os tópicos.

Depois de prontos, os mapas devem ser recolhidos e analisados pelo professor, pois dessa forma será possível determinar quais aspectos referentes a estes conteúdos devem ser enfatizados em um próximo momento. O tempo consumido nesta etapa depende do nível de compreensão da turma. Recomendamos que o professor reserve para isso um período correspondente a uma aula, pois a criação de mapas conceituais úteis ao fim proposto depende de tempo e reflexão.

c. Mapa conceitual geral

Após o recolhimento e a análise dos trabalhos, propomos a criação de um novo mapa conceitual, mas, desta vez, com a participação de toda a classe. Este novo mapa pode ser materializado na forma de um cartaz ou slide para projeção, pois é importante que a turma que o elaborou em conjunto possa vê-lo também de forma integral. Neste trabalho é importante evitar, num primeiro instante, a apresentação de fórmulas, pois estes itens mais formais do conteúdo podem ser julgados excessivamente complexos por alguns estudantes, vindo posteriormente a dificultar a aprendizagem. Mais tarde, depois de os estudantes serem estimulados a participar ativamente da construção do mapa, eles terão melhores chances de utilizar os conceitos e descrições matemáticas, agregando conhecimentos novos e percebendo a visão diferente dos colegas sobre os mesmos temas.

No lugar das fórmulas, propomos que sejam escritos os conceitos o mais resumidamente possível, pois esta é uma forma de fazer com que os alunos compreendam os assuntos de maneira integrada, sem se limitarem a formulações matemáticas pré-estabelecidas. Este mapa pode ser pendurado na sala de aula para que, posteriormente, os alunos possam recorrer a ele se tiverem alguma dúvida conceitual, evitando interromper a aula durante a explicação de novos conceitos e leis. A partir do momento em que o professor observar que a classe já possui os pré-requisitos conceituais da unidade didática pode iniciar, então, a segunda fase.

d. Método de avaliação

Para estimular os alunos e atribuir justa importância à etapa anterior o professor pode associar a ela um tipo de avaliação que não se limite à atribuição de grau ao conteúdo e forma dos mapas conceituais individuais, mas considere também a participação, o interesse e o empenho de cada indivíduo no desenvolvimento das atividades propostas. É fundamental que o professor tenha presente que no ensino básico das ciências os objetivos educacionais devem priorizar conhecimentos gerais, úteis ao cidadão comum, não fazendo sentido a aplicação de avaliações rigorosas quanto a aspectos excessivamente particulares e técnicos. Procedimentos equivocados neste pormenor costumam causar prejuízos no sentido de afastar os estudantes das ciências, ao invés de aproximá-los dela.

No final do capítulo proporemos um método para a avaliação, envolvendo toda a unidade didática trabalhada.

3.2.2 Apresentação da unidade

a. Objetivos

Expor à classe os conteúdos relativos à unidade e as metas a serem atingidas, motivar os alunos em relação aos temas, proporcionar uma visão de conjunto da unidade, mostrando os problemas significativos e as aplicações práticas relacionadas.

b. Atividades

Nesta etapa o professor pode mostrar aos alunos o que será trabalhado nas aulas seguintes. Para isso, deve conhecer amplamente a unidade, pois somente dessa forma estará apto a direcionar os trabalhos no sentido de proporcionar aos estudantes uma ampliação de conhecimentos consubstanciada em ações integradas.

Questionar os alunos com perguntas do cotidiano é uma maneira de motivá-los a enfrentar com proveito as tarefas relativas à unidade. Isso leva os estudantes a perceberem como ela os ajudará na construção do conhecimento da realidade, bem como das aplicações práticas a ela relacionadas.

Exemplos de questionamentos:

- Por que quando lançamos um objeto verticalmente para cima ele tende a subir e, depois de atingir uma determinada altura, retorna para a Terra?
- Por que os corpos geralmente caem quando são abandonados a certa altura?

- Como se comporta a velocidade de um paraquedista após se soltar do avião?
- De que modo age a força gravitacional sobre os corpos? A que ela se relaciona?

Esta unidade está dividida em tópicos que cooperarão para atingir os objetivos propostos. Para apresentá-los aos alunos pode ser interessante mostrar cada tópico separadamente, explicando como cada um será trabalhado. Os detalhes específicos das atividades podem ser expostos no momento de início de cada tópico, evitando informações excessivas e fora de contexto.

Tópicos a serem desenvolvidos:

- Movimento e Gravitação: Divergências entre Aristóteles e Galileu.
- Atividade Experimental I: A influência da massa e do atrito no movimento de queda dos corpos.
- Atividade Experimental II: Descobrindo o valor da gravidade local.
- Atividade Experimental III: Entendendo o movimento de projéteis.
- Síntese e Expressão Escrita.

Nesta etapa de apresentação pode ser necessário um intervalo de tempo de aproximadamente meio período de aula.

3.2.3 Desenvolvimento das atividades

a. Movimento e Gravitação: divergências entre Aristóteles e Galileu

O fenômeno da queda livre pode ser entendido, por exemplo, a partir de dois referenciais distintos, a saber: Aristóteles e Galileu. A aprendizagem deste conteúdo, no nível médio de ensino, pode ser favorecido pela contraposição das formulações aristotélicas e galileanas, pois elas são claramente distintas e podem, até certo ponto, serem tratadas a partir do senso comum, por experimentos simples e pelo conhecimento contemporâneo difundido pelos meios de comunicação de divulgação científica.

Nesta etapa do estudo o objetivo pode ser a ampliação do conhecimento de uma parte da história da Física por meio do estudo das divergências existentes entre as idéias de ambos os autores, contextualizadas relativamente aos períodos históricos distintos em que eles viveram. Para isto, o professor pode dividir os estudantes em pelo menos dois grupos, cada um dos quais ficando responsável pelo estudo do tema movimento, com um grupo centrado em Aristóteles e outro grupo centrado em Galileu.

No caso de ser conveniente a reunião dos estudantes em mais de dois grupos o professor pode sugerir que os grupos dividam os centros de interesse em partes complementares. Por exemplo, os grupos que estudarão Aristóteles podem se fixar em diferentes aspectos do tema: enquanto um subgrupo tenta desenhar a sociedade grega do século IV a.C., outro subgrupo dedica-se às idéias do filósofo, e assim por diante. O objetivo geral desta etapa é construir um quadro, fundamentado contextualmente, das idéias de Aristóteles e Galileu sobre o movimento dos corpos, de forma que os estudantes sejam capazes de apresentar suas descobertas para a turma.

Se o tempo disponível for curto o professor pode solicitar que o trabalho seja desenvolvido em horário extraclasse, mas o ideal é que a pesquisa seja realizada em classe, ou nas dependências da escola, sob a supervisão do professor. Ao final desta etapa cada grupo pode apresentar suas descobertas oralmente para a classe, entregando uma cópia escrita para o orientador. É fundamental que a turma se mantenha atenta às explicações dos colegas para que todos se sintam valorizados. Também é fundamental que os colegas participem com perguntas, opiniões e sugestões, ao longo de todo o processo.

Avaliação:

Sugerimos que a avaliação deste tópico centre-se na qualidade da apresentação oral, mas considere também a qualidade do texto apresentado ao professor.

Indicações para o professor: nesta etapa é possível, também, promover um trabalho interdisciplinar com História. Se julgar conveniente, proponha ao professor desta disciplina que estude com os alunos os acontecimentos e as influências históricas dos fatos das vidas de Aristóteles e Galileu, e o que eles mudaram na ciência.

ATIVIDADE EXPERIMENTAL 1
A Influência da Massa e do Atrito no Movimento de Queda dos Corpos

Indicações para o professor:

Sempre que for necessário, durante o seguinte experimento recorra ao mapa conceitual geral para que os alunos relembrem os conceitos anteriores.

O experimento apresentado a seguir foi inspirado no livro **Física no Ensino Médio: onde estão os professores? Fatos, hipóteses e subsídios para equacionar a questão** (GPEF, 2010, no prelo).

Introdução:

Por que um corpo cai para a Terra ao ser abandonado de uma certa altura? Por que um corpo lançado verticalmente para cima sobe até atingir determinada altura e depois retorna para a Terra? Essas são perguntas raramente feitas por adolescentes e adultos porque estes já se acostumaram ao fenômeno gravitacional. Crianças, porém, costumam fazê-las corriqueiramente.

A teoria paradigmática contemporânea, fundamentalmente galileana, afirma que a Terra exerce sobre os corpos próximos à sua superfície uma força de atração apontada para seu centro que pode ser percebida pela trajetória de um corpo em queda. Cerca de vinte séculos antes de Galileu, porém, o filósofo grego Aristóteles também elaborou uma tentativa para compreender o movimento de queda dos corpos, em uma teoria que se relacionava mais com a observação e a inferência das causas e objetivos do que com o mecanismo dos fenômenos. Suas idéias influenciaram decisivamente a comunidade de sua época e dos séculos posteriores, e estavam em bom acordo com o senso comum da população.

No Renascimento, já com o uso da experimentação, o físico italiano Galileu Galilei entendeu que as idéias aristotélicas não davam conta de descrever adequadamente a realidade. Ele então refutou essas idéias e apresentou um novo modelo para explicar o movimento dos corpos próximos à Terra, o que gerou bastante polêmica. Embora o modelo de Aristóteles tenha sido substituído há mais de três séculos, suas idéias não foram totalmente superadas. Por terem vinculação com o senso comum, elas continuam enraizadas no modo de pensar das pessoas leigas e até mesmo de estudantes de níveis mais avançados.

Nessa atividade experimental você poderá escrever como interpreta o movimento de queda dos corpos e verificar se suas concepções estão de acordo com o modelo proposto por Aristóteles ou por Galileu.

Aparato experimental:

- 1 borracha
- 1 livro
- 2 folhas de papel 10cm x 15cm

Procedimento experimental:

Pegue uma borracha e atire-a para cima. Observe atentamente seu movimento. Repita várias vezes o procedimento e expresse sua opinião sobre ele, respondendo as questões abaixo.

- Descreva a trajetória da borracha.
- Há diferença entre o tempo na subida e na descida, aparentemente?
- Quanto vale a velocidade da borracha no exato instante em que ela atinge o pico da trajetória?
- Como se comporta a *velocidade* da borracha durante a queda?
- Como se comporta a *aceleração* da borracha durante a queda? Ela é positiva ou negativa?
- Qual é o tipo de movimento que é executado pela borracha? Quais as equações o descrevem? (Discuta essas questões com a turma para que as características do movimento de queda dos corpos fiquem claras e bem entendidas)

Agora deixe cair o livro e a borracha, simultaneamente, e escreva o observado.

- Qual deles chegou primeiro ao chão?
- Frente ao resultado de sua experimentação, você diria que o tempo de queda dos objetos depende de suas massas?

Amasse uma das folhas de papel, fazendo com que ela fique parecida com uma bolinha. Em seguida, pegue a bolinha de papel e a folha aberta, e solte-as de uma mesma altura, no mesmo instante. Observe e responda:

- Qual delas chegou primeiro ao chão?
- O tempo de queda dependeu do formato do objeto?
- Que fator influiu no tempo de queda dos objetos?

O movimento que os objetos acabaram de executar é conhecido como *Queda Livre*. A partir dos experimentos acima, escreva as características desse movimento e relacione as grandezas que fazem parte dele.

Pode-se dizer que o movimento de queda livre está relacionado com algum outro movimento estudado anteriormente? Qual?

Análise do experimento:

O efeito que retarda a queda de um objeto é o atrito com o ar, cuja influência é mais perceptível no movimento da folha de papel, que é mais leve, do que sobre o movimento do livro, mais pesado. Quando a folha de papel foi amassada, a resistência do ar foi reduzida significativamente e então a folha aberta e a folha amassada em forma de bolinha, embora tenham mesma massa, não caíram simultaneamente.

O ar causa retardo no movimento de qualquer corpo, independentemente de ele ser leve ou não. O que ocorre é que o efeito do atrito é mais bem percebido em corpos leves já que a força motora (força peso) é menor nesse caso. O movimento de corpos mais pesados, como uma borracha, um livro, uma pedra, não é muito influenciado pelo atrito com o ar quando soltos de alturas pequenas, podendo ser considerado desprezível. A queda, então, ocorre de forma mais próxima ao que ocorreria se os corpos estivessem no vácuo. A exigência da pequena altura se deve ao fato de que os corpos caem aceleradamente sob ação da gravidade, enquanto o atrito aumenta com o quadrado da velocidade, causando uma desaceleração apreciável em quedas maiores.

Se pudermos desprezar o atrito os corpos, ao caírem para a Terra, executam um movimento variado, isto é, a velocidade aumenta à medida em que vão se aproximando da Terra, ou seja, ocorre uma aceleração. Essa aceleração é chamada de aceleração da gravidade, representada pela letra "g".

O valor da aceleração da gravidade, no nível do mar, é próximo a 9,8m/s². Isso significa que a velocidade do corpo em queda aumenta 9,8 m/s a cada segundo. Esta aceleração não é constante, sendo influenciada por diversos fatores, como a altitude e a presença de corpos maciços próximos, como montanhas, mas para efeito de cálculos limitados a experimentos do cotidiano, ela pode ser considerada constante. Se, porém, os movimentos em estudo envolverem grandes variações de altitude, por exemplo, as mudanças no módulo da aceleração da gravidade precisam ser levadas em conta. O valor da aceleração da gravidade também depende do planeta, satélite ou estrela a que estamos nos referindo. Por exemplo, na superfície da Lua a gravidade é cerca de seis vezes menor que na superfície da Terra.

Se a aceleração da gravidade pode ser considerada constante em um dado experimento, então nesse experimento a velocidade do móvel em queda varia uniformemente. Um corpo em queda aumenta sua velocidade em 9,8 m/s a cada segundo, e um corpo que está subindo diminui sua velocidade em 9,8m/s a cada segundo. Essas características são as mesmas do movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV). Sendo assim, a Queda Livre pode ser considerada uma aplicação prática do modelo de movimento uniformemente acelerado denominado MRUV.

Modelo de Aristóteles sobre a queda dos corpos:

O filósofo grego Aristóteles afirmava que abandonando corpos leves e pesados de uma mesma altura seus tempos de queda não seriam iguais. Isso é precisamente o que se observa na experimentação do cotidiano, por

isso essa idéia aristotélica faz parte do senso comum e é tão disseminada. A cosmovisão aristotélica incluía uma percepção da *naturalidade da queda dos corpos pesados*, constituídos de *água e terra*, e a *naturalidade da elevação das substâncias leves*, constituídas de *fogo e ar*. No entanto, isso não ocorre por uma característica intrínseca dos corpos ou da gravidade, mas sim pela interferência causada pelo atrito com o ar, que faz parte do nosso meio-ambiente terrestre particular. Sendo assim, se estamos tentando elaborar uma teoria mais geral, que descreva a queda dos corpos em qualquer lugar e ambiente, precisamos redesenhar esse conceito, isolando-o do ambiente.

A crença no modelo aristotélico perdurou por cerca de dois mil anos, e durante todo este período, idéias concebidas segundo a ótica aristotélica, pitagórica e platoniana serviram de base para a elaboração de modelos de funcionamento do universo.

Modelo de Galileu Galileu sobre a queda dos corpos:

Sendo considerado o introdutor do método experimental na ciência, Galileu pode contestar várias conclusões aristotélicas. Em parte por suas experimentações, em parte por elaborações mentais, Galileu concluiu que corpos leves e pesados, quando abandonados de uma mesma altura, atingem o solo em instantes diferentes porque a ação do ar deve ser considerada, e não porque diferem em peso (KAVALCANTE, 2009). Apesar da evidência das experiências, Galileu sofreu perseguição porque suas idéias contrariavam preceitos aristotélicos que haviam sido assumidos pelos detentores do poder, na época, como a imagem de um mundo centrado na Terra.

Equações da Queda Livre:

Se corpos em queda livre se movem segundo as mesmas características do MRUV, então as equações são as mesmas. As únicas diferenças são os símbolos utilizados:

$$a = g$$

$$\Delta S = \Delta h$$

$$h = h_0 + V_0 t + \frac{g\,t^2}{2}$$

$$v = v_0 + g\,t$$

$$v^2 = {v_0}^2 + 2g\Delta h$$

Indicações para o professor:

Após desenvolver esta experiência, relembre o experimento juntamente com a turma e, para finalizar, explique de que forma o atrito com o ar e a massa dos objetos influem no movimento de queda livre. Se julgar conveniente use a equação de Stokes aplicada a uma esfera em um meio denso, como óleo ou mel. Peça também para que eles dêem exemplos de situações em que os conceitos da queda livre podem ser aplicados.

Avaliação:

Como forma de avaliação desta atividade, sugerimos que o professor peça para que os alunos entreguem um breve relatório. Há um modelo de relatório que pode ser utilizado no Apêndice A.

ATIVIDADE EXPERIMENTAL 2
Descobrindo o Valor da Gravidade Local

O experimento seguinte foi retirado do livro Física no Ensino Médio: onde estão os professores? Fatos, hipóteses e subsídios para equacionar a questão. (GPEF, 2010, no prelo).

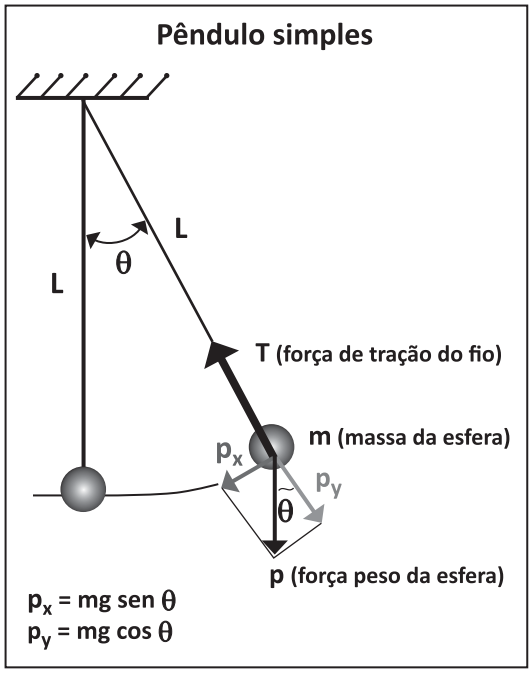
Indicações para o professor:

Antes de iniciar esta atividade, é necessário que se explique para a classe o que é o período de oscilação (T) e como medir o comprimento (l) de um pêndulo simples.

Objetivos:

Determinar a aceleração gravitacional a partir da análise do movimento de um pêndulo.

Aparato experimental:



- Suporte para pêndulo.
- Pedaço de fio.
- Um objeto, preferencialmente esférico.
- Cronômetro.

Introdução:

Como deve ser do seu conhecimento, o período do pêndulo matemático é aproximadamente dado pela fórmula $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Medindo o comprimento do pêndulo e o seu período, pode-se determinar a aceleração da gravidade. Surge, porém, um problema. No pêndulo matemático (teórico) a massa é puntiforme e a corda é inextensível e sem massa, e isso não é realizável. O pêndulo que usamos é uma esfera de chumbo ou material pesado similar, suspensa em uma corda real, que se deforma e tem massa. Teoricamente a massa da esfera pode ser considerada concentrada no centro da esfera (centro de gravidade). Mas isso exige que a esfera seja perfeita, homogênea, sem falhas de fundição. Como a esfera que usaremos não é perfeita, não podemos, devido a isso, determinar com precisão o comprimento l. Bessel indicou um método que permite contornar essa dificuldade. Segundo ele, procede-se da seguinte maneira:

Procedimentos:

- Monte o suporte como mostra a figura, e predefina dois comprimentos l_1 e l_2 que irá usar.
- Faça oscilar o pêndulo de comprimento l_1 e meça o período T_1.
- Altere o comprimento do pêndulo para l_2 e meça o período T_2.
- Pela fórmula do período obtemos:

  $(T_1)^2 = (2\pi)^2 . \frac{l_1}{g}$ e $(T_2)^2 = (2\pi)^2 . \frac{l_2}{g}$,

  subtraindo $(T_1)^2$ de $(T_2)^2$ obtemos $(T_1)^2 - (T_2)^2 = \frac{(2\pi)^2}{g}(l_1 - l_2)$

- Nesta relação $l_2 - l_1 = \Delta l$. Para determinarmos g devemos conhecer apenas a diferença entre os comprimentos e essa diferença podemos medir com precisão. Determine g com o auxílio da equação acima.

Questionamentos:

- Baseando-se na equação para determinação o período de um pêndulo responda. A massa do objeto oscilante interfere no período da oscilação?
- Pela experiência, de que maneira o comprimento da corda influencia no período? Sua constatação é comprovada pela equação matemática? Explique.
- O valor que calculou é compatível com o valor teórico.
- Caso a questão anterior tenha resposta negativa indique os possíveis fatores que podem ter influenciado no erro.

Avaliação:

Como forma de avaliação desta atividade sugerimos que o professor solicite a entrega das respostas aos questionamentos, ou proponha o desenvolvimento de um relatório semelhante ao da Atividade Experimental 1.

ATIVIDADE EXPERIMENTAL 3
Entendendo o Movimento de Projéteis (opcional)

Os tópicos desta unidade dão a oportunidade de trabalhar também o movimento de projéteis, uma vez que foi feito um estudo prévio sobre MRUV e sobre Queda Livre. Caso não faça parte do objetivo do professor, esta atividade pode ser desenvolvida em outro momento.

Este experimento foi retirado do livro Física no Ensino Médio: onde estão os professores? Fatos, hipóteses e subsídios para equacionar a questão. (GPEF, 2010, no prelo).

Objetivos:

Definir o movimento de projéteis;

- Observar a independência dos movimentos;
- Destacar a presença de movimentos estudados anteriormente.

Introdução:

Neste experimento vamos estudar o movimento de um objeto lançado obliquamente para o ar, isto é, analisaremos o que ocorre quando o objeto é lançado com velocidade v_0 cuja direção não é vertical. Essa situação se equipara, por exemplo, ao movimento de uma bola de futebol chutada por um jogador, ou ao movimento descrito por um objeto quando o atiramos para longe. Aqui, esse objeto lançado será chamado de projétil.

Aparato experimental:

- 1 borracha ou giz;
- 2 moedas;
- 1 régua;
- 1 mesa.

Procedimento experimental:

Observe a figura 1. Coloque a régua apoiada sobre a mesa, com uma moeda A sobre a régua e uma moeda B, na outra extremidade, próxima à borda da mesa e encostada na régua.

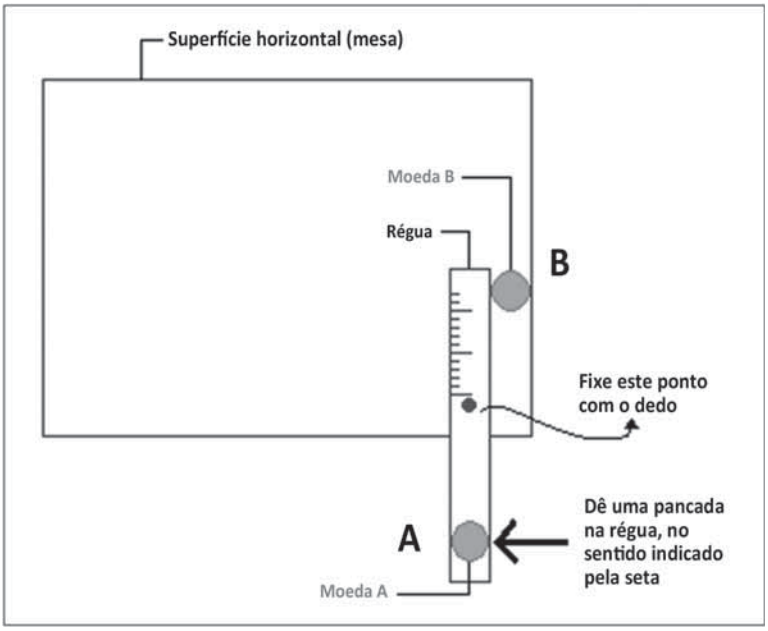


Figura 1: Régua posicionada para o início do experimento

Fixe a régua, com o dedo, no ponto que está aproximadamente no centro dela, de modo que possa girar em torno dele com facilidade. Em seguida, aplique uma pancada súbita na extremidade da régua, não tão violenta e sem encostar na moeda, conforme mostra a Figura 1. Se tudo ocorrer como planejado, a moeda A deve simplesmente cair verticalmente enquanto a moeda B deve ser lançada horizontalmente, caindo em um movimento balístico.

Repita o procedimento quantas vezes for preciso e observe as trajetórias descritas pelas duas moedas – preste atenção ao barulho por elas produzido no momento em que atingem o solo.

Responda as questões propostas:

- Que tipo de movimento foi executado pela moeda A?
- E pela moeda B?
- As moedas A e B levaram o mesmo tempo para atingir o solo?
- Na direção vertical, as velocidades de queda de ambas as moedas é igual? Justifique.

- Pode-se dizer que o movimento vertical e o horizontal são independentes, ou seja, cada um ocorre como se o outro não existisse? Explique com suas palavras.
- Proponha algumas equações que possam descrever o movimento horizontal e o vertical das moedas. (Faça uma relação deles com os movimentos já estudados anteriormente, para facilitar a compreensão)
- A velocidade no movimento horizontal é constante? E a aceleração?
- Existe variação da velocidade no movimento vertical?

Instruções para o professor:

Para demonstrar para a classe, pegue um objeto qualquer que possa ser arremessado (borracha, giz). Posicione-se na sala de aula de forma que os alunos possam visualizar facilmente o movimento que será descrito por esse projétil. Então, atire-o obliquamente, fazendo com que haja um movimento vertical e outro horizontal. Sugere-se que o professor repita o movimento e que faça uma análise de cada parte do movimento, individualmente, de maneira que os alunos possam verificar minuciosamente algumas características importantes em cada ponto da trajetória (como por exemplo, o começo, o pico e o fim).

b. Síntese e Expressão Escrita

Segundo Carvalho (1997, p. 70): "Não se encerra com a prova o estudo da unidade. Agora vai-se apelar para recursos de fixação do conhecimento já adquirido". O objetivo desta etapa é, portanto, servir de auxílio à organização do conhecimento, fornecendo oportunidade de exercício da expressão escrita dos alunos. Para iniciar, sugerimos que faça uma síntese oral, dirigida aos alunos, de tudo o que foi desenvolvido, de forma que relembrem o que foi trabalhado na unidade.

A seguir, peça para que os alunos preparem, em grupos, um trabalho extraclasse que consiste em uma espécie de resenha, com possíveis críticas e sugestões das atividades trabalhadas. Dê um prazo de, no mínimo, uma semana, e no máximo, duas para o desenvolvimento do trabalho.

3.3 Avaliação

Caso haja a necessidade da aplicação de provas, pode-se aplicá-las no final de cada atividade, com o conteúdo referente àquela etapa. Para verificar a aprendizagem dos estudantes como um todo na unidade, pode-se fazer a seguinte avaliação (ver Quadro 1).

QUADRO 1

Esquema proposto para a avaliação dos estudantes na unidade

ATIVIDADE	NOTA 1 (7 pontos)	NOTA 2 (3 pontos)	TOTAL (10 pontos máx.)
Mapas conceituais	Mapa individual	Participação – mapa geral	**T1=**
Movimento e Gravitação	Apresentação oral	Trabalho escrito	**T2 =**
Atividade Experimental I	Relatório (individual)	Participação	**T3 =**
Atividade Experimental II	Relatório (individual)	Participação	**T4 =**
Atividade Experimental III	Relatório (em grupo)	Participação	**T5 =**
Síntese e Expressão Escrita	Trabalho extraclasse	**-**	**T6 =**
NOTA FINAL (NF)	$NF = \frac{T1+T2+T3+T4+T5+T6}{6}$		

APÊNDICE

Relatório

Alunos: _____

_____

Atividade: _____

_____

Introdução: _____

_____

_____

_____

Objetivos: _____

_____

_____

Desenvolvimento: _____

_____

_____

_____

_____

_____

Conclusões: _____

_____

_____

_____

_____

Referências: _____

_____

_____

Referências Bibliográficas

Carvalho, I. M. (1997). O ensino por unidades didáticas. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 348 p.

Geymonat, L. (1962). **Galileu Galilei.** Rio de Janeiro: Editora Livro S/A, 227 p.

González, J. F.; Escartín, N. E.; Jiménez, T. M.; García, J. F. R. (1999). Como hacer unidades didácticas innovadoras. Sevilha: Díada, 1999.

GPEF (2010). Física no Ensino Médio: onde estão os professores? Fatos, hipóteses e subsídios para equacionar a questão. (Porto Alegre: EDIPUCRS, no prelo).

Kavalcante, K. Galileu: da Ciência à Santa Inquisição. Disponível em: http://www.mundoeducacao.com.br/fisica/queda-livre.htm. Acesso em: agosto de 2009.

Moreira, M. A., Buchweitz, B. (1987). Mapas conceituais: instrumentos didáticos, de avaliação e de análise de currículo. São Paulo: Moraes, 83p.

Bibliografia sugerida para o professor

Drake, S. (1981). Galileu. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 157p.

Santos, J. T. Galileu Galilei: Diálogo dos Grandes Sistemas (primeira jornada). Lisboa: Gradiva. 2. ed. 119p.

Vascocelos, J.;Gleiser, M. (2006). Galileu – e a nova Física. São Paulo: Odysseus, 1. ed. 252p.

Capítulo 4

Ondas Mecánicas

Una propuesta didáctica para favorecer la argumentación y la explicación fenomenológica del contexto del alumno

Carla Hernández, Manuel Ramírez, Patricio Farfán

Contenido

- *Resumen*
- *Introducción*
- *Enseñanza y aprendizaje de las ondas en la escuela*
- *¿Qué noción de onda se puede visualizar con una cubeta?*
- *Secuencia Didáctica*
- *Decisiones de Diseño Didáctico*
- *Planificación*
- *Desarrollo de la Unidad Didáctica*
  - *Fase 1: Exploración*
  - *Fase 2: Introducción a nuevos conocimientos*
  - *Fase 3: Sistematización*
  - *Fase 4: Aplicación*
- *Reflexiones finales*
- *Referencias bibliográficas*

Resumen

El presente capítulo muestra una propuesta didáctica para la enseñanza de las ondas mecánicas con la intensión de que los estudiantes logren explicar fenomenológicamente el mundo que les rodea utilizando el modelo ondulatorio. Para lograr este objetivo se han planteado una secuencia de actividades secuenciadas en base al ciclo de aprendizaje constructivista proponiendo las fases de exploración, introducción de los nuevos conceptos, sistematización y aplicación. Toda el desarrollo de la unidad didáctica se centra en la promoción de las competencias cognitivo lingüísticas de la explicación y la argumentación.

Al finalizar la unidad, los estudiantes aplicarán los aprendizajes logrados a través de diseño de una actividad experimental propuesta por ellos mismo para lograr enseñar a otros estudiantes la noción de onda mecánica que se espera ellos aprendan con esta propuesta.

4.1 Introducción

Lo que se presenta en este capítulo, es una propuesta educativa para la enseñanza de los fenómenos ondulatorios, desde una noción de onda concebida como un proceso de transmisión de energía a través de un medio elástico y que es originada por la perturbación del mismo.

Considerando que existe actualmente consenso en la comunidad de investigadores en didáctica de las ciencias sobre enseñanza de la ciencias basada en modelos (Chamizo, 2010), abordaremos la presente unidad desde esta perspectiva. A su vez, siendo consecuentes con la noción de onda considerada, podemos decir que la enseñanza de los fenómenos ondulatorios favorece la comprensión de la naturaleza al estrechar un vínculo con otro modelo aún más generalizable en la enseñanza de las ciencias, como lo es la Energía.

Desde este punto de vista, el presente capítulo tiene como objetivo principal, promover la comprensión de los fenómenos naturales que pueden ser explicados desde un modelo ondulatorio como el ya descrito.

Proponemos aquí una forma de trabajo basada en la experimentación y centrada en la búsqueda de la apropiación del conocimiento a través de la vinculación entre el saber "sabio" y el saber hacer propio del trabajo práctico. Para conseguirlo recurrimos a ejemplos de la vida cotidiana que pueden ser fácilmente recreados y discutidos a la luz de una teoría sobre fenómenos ondulatorios que sustenta la noción de onda mecánica como un proceso de transmisión de energía.

4.2 Enseñanza y aprendizaje de las ondas en la escuela

Tal como se ha venido diciendo hasta ahora, estudiar Ondas en la escuela es un proceso complejo. No sólo por su carácter factual, abstracto o por lo complicado de su lenguaje, sino también por la variedad de fenómenos que pueden ser explicados desde el punto de vista de un modelo científico explicativo llamado "Onda". Al decir esto, estamos pensando en que la noción científica de Onda tiene un carácter explicativo importante, dado su vinculación con otro modelo aún más general que es el de "Energía".

Podemos de este modo, decir que la noción de onda, es una manera de mirar el mundo; una manera de observar y explicar fenómenos desde el punto de vista de los procesos de transmisión de energía que ocurren en la naturaleza, y de este modo, comprender que son variadas las formas con las cuales podemos identificar estos procesos.

Es así como surge la diversidad de representaciones que encontramos en los materiales didácticos y recursos educativos vigentes, tales como libros de texto, animaciones en internet, etc mediante las cuales sus creadores buscan plasmar una parte del mundo, un fenómeno tal vez, y atribuirles características que sean fácilmente comprensibles por los estudiantes sobre todo por el carácter analógico que estas representaciones suelen tener (Hernández, 2011).

Sin embargo, si todas estas representaciones no se utilizan en concordancia con la idea de que un modelo es una forma de mirar el mundo, estas pierden su carácter interpretativo y pasan a ser los hechos mismos. De este modo, si preguntamos a un estudiante ¿Qué es una onda? Lo más probable es que su respuesta esboce una curva sinusoidal o haga referencia a las ondas del agua, porque son esas las representaciones más habituales que aparecen por ejemplo en las ilustraciones de los libros de texto. Muchas veces estas representaciones contribuyen a las dificultades que los estudiantes tienen para comprender la noción de onda y dar explicaciones a los fenómenos a ella asociados (Maurines, L. 1992, Welti, R. 2002, entre otros).

Precisamente, el tipo de onda que los estudiantes visualizan al desarrollar experiencias prácticas con la cubeta de ondas, dista bastante de lo que en libros de texto se representa como pelotas unidas por resortes, por ejemplo, y no siempre es fácil hacer la analogía entre lo observado y las curvas sinusoidales mediante las cuales se grafican comúnmente características de las ondas como su frecuencia o longitud de onda.

4.2.1 ¿Qué noción de onda se puede visualizar con una cubeta?

Comúnmente, son pocas las experiencias prácticas de fácil acceso y ejecución que el docente puede desarrollar en el aula con bajo costo y con gran significatividad para el aprendizaje. Si a esto sumamos la dificultad que el tema representa en sí mismo, encontramos en la "cubeta de ondas" una oportunidad importante para generar conocimiento reflexivo respecto a la concepción de onda vista como un proceso de transmisión de energía.

Precisamente con este dispositivo, los estudiantes pueden interactuar con un medio elástico, el agua, generar una onda que se propague a través de él, y visualizar como es dicha propagación en término de los fenómenos que pueden ocurrir cuando cambian las propiedades físicas del medio.

Entendemos por medio elástico a aquel que sufre deformaciones reversibles cuando actúa sobre él una fuerza externa. En nuestro caso particular, la fuerza o agente externo genera una perturbación en ese medio, el cual, dadas sus propiedades de elasticidad, puede transmitir dicha propagación generando lo que conocemos como "Onda mecánica".

4.3 Secuencia Didáctica

Considerando lo anteriormente expuesto, se presenta a continuación una propuesta de trabajo de aula para el docente de física. Inicialmente, se sugiere tener presente las decisiones didácticas en la que se fundamenta la construcción y diseño de la unidad.

4.3.1 Decisiones de Diseño Didáctico

Respecto a las decisiones a tener en cuenta para el diseño e implementación de esta unidad, se debe establecer primero la noción de onda que se quiere enseñar, para qué enseñarla, qué CPC serán promovidas con esta noción y sobre todo, cómo enseñar dicha noción. En relación a esto, se han establecido las siguientes decisiones:

a. ¿Qué noción de ONDA MECÁNICA enseñar?

La onda mecánica será enseñada como un proceso de transmisión de energía a través de un medio elástico y que es originada por la perturbación del mismo.

En relación a esta noción es importante notar la diferencia sustancial con la noción de onda electromagnética.

b. ¿Para qué enseñar esa noción de ONDA MECÁNICA?

Para que los estudiantes logren reflexionar, argumentar e intervenir en el mundo que les rodea, a partir del conocimiento adquirido sobre los fenómenos de naturaleza ondulatoria asociados a la noción científica en cuestión.

c. ¿Para qué CPC asociadas a esa concepción de ONDA MECÁNICA?

Esta noción de Onda Mecánica favorece, entre otras **CPC,** la **EXPLICACIÓN** de un *hecho experimental* o un fenómeno del mundo real con base en la evidencia empírica o definiciones parciales; y la **ARGUMENTACIÓN** basada en la *modelización teórica* de fenómenos.

Por otra parte el **DESAROLLO DE PENSAMIENTO CRÍTICO** requiere dominio de información específica y elaboración teórica con base en "ideas que tienen atributos valóricos, culturales y conceptuales".

d. ¿Cómo enseñar esa concepción de ONDA MECÁNICA para esos aprendizajes, con base en la RRPP?

En base a la observación, discusión, reflexión y experimentación sobre situaciones cotidianas vinculadas a la noción de onda estipulada. Para ello se elaboraron cuatro fases que se explicitan a continuación.

4.3.2 Planificación

Unidad didáctica: Ondas Mecánicas		
Contenido	Conceptual	• Onda • Frecuencia y periodo asociados a una onda mecánica. • Longitud de onda. • Rapidez de propagación. • Fenómenos ondulatorios como la interferencia, la difracción, la reflexión y la refracción.
	Procedimental	• Descubrir la onda a través de los fenómenos asociados a ella en actividades cotidianas. • Describir a la longitud de onda y a la frecuencia como nociones fundamentales en la descripción de los fenómenos ondulatorios. • Identificar las relaciones existentes entre la longitud de onda, el período, la frecuencia y la rapidez de propagación de las ondas.

Contenido	Actitudinal	• Respeto por las opiniones de sus compañeros y del profesor al momento de realizar diversas actividades. • Valoración de los consensos y de las discusiones originadas en los grupos como medio para la construcción del saber científico.
Objetivo		Comprender diversos fenómenos naturales que pueden ser explicados desde el modelo ondulatorio mecánico basado en el entendimiento de una onda como un proceso de transmisión de energía a través de un medio elástico y que es originada por la perturbación del mismo
Objetivos específicos		• Explorar los conocimientos previos respecto a la noción de onda mecánica. • Relacionar diversos fenómenos naturales y cotidianos con la realidad del alumno, con el modelo ondulatorio. • Explicitar en forma oral y escrita las ideas comprendidas y consensuadas con un grupo de trabajo.
Aprendizajes esperados		Los estudiantes: • Identifican sus propias preconcepciones sobre la noción de onda. • Relacionan diversos fenómenos cotidianos con el modelo ondulatorio mecánico. • Comprenden la noción de onda mecánica y la relacionan con las variables: longitud de onda, frecuencia y período. • Descubren y aplican la relación entre la frecuencia y el periodo de una onda. • Relacionan la rapidez de propagación de las ondas con la frecuencia y la longitud de las ondas. • Aplican la noción de onda a actividades prácticas diseñadas por ellos mismos.
Tiempo estimado		4 clases de 1 hora y 30 minutos.
Materiales utilizados		Por el profesor: Pizarra, fotocopias de los instrumentos de aprendizaje y evaluación, computadores con internet por cada 4 alumnos, pliegos de papel, proyector y computador para el profesor. Por lo alumnos: Pliego de papel, plumones, bandeja de vidrio o plástico (transparente), linterna, caja de zapatos, tijeras, papel blanco tamaño oficio, regla transparente y barras de vidrio, policarbonato u otro material transparente.

4.4 Desarrollo de la Unidad Didáctica

El diseño de la unidad didáctica presentada se fundamenta en el Ciclo de Aprendizaje Constructivista (CAC) propuesto por Jorba y Sanmartí (1996). Así, el desarrollo de esta unidad se fundamenta en las cuatro fases propuestas por ambos autores: la exploración, la introducción a nuevos conocimientos, la sistematización y la aplicación. Estas fases serán descritas a continuación.

4.4.1 Fase 1: Exploración de ideas previas

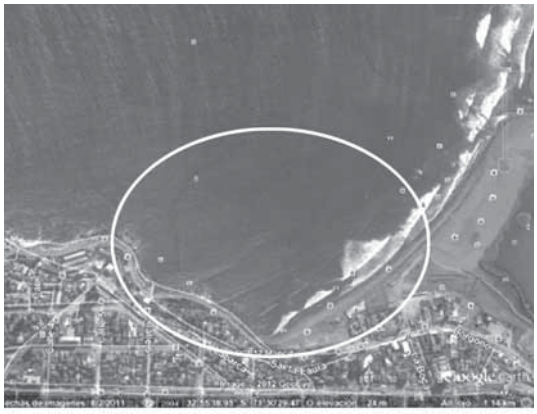
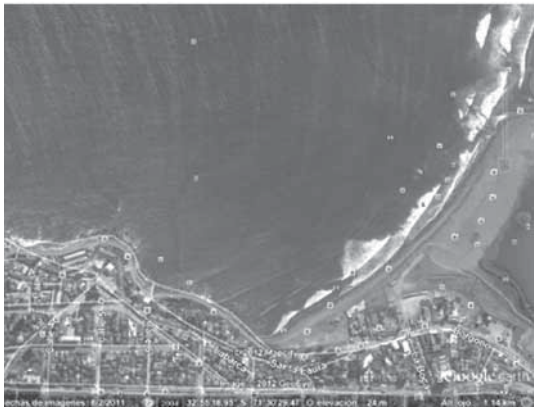
En esta primera fase del CAC nos planteamos como objetivo principal el lograr identificar las preconcepciones de los estudiantiles con respecto a la noción científica de onda mecánica y cómo ésta interviene en su forma de comprender, explicar y justificar el mundo. Tras este objetivo buscamos también que los mismos estudiantes, al verbalizar y poner en común sus propias ideas frente a sus pares, logren concientizar la variedad de perspectivas que tienen sus compañeros y por lo tanto, comprender lo complejo y dinámico que es el entendimiento del mundo desde una perspectiva específica.

ACTIVIDAD 1
Identificación de Ideas Previas

Para lograr la finalidad de esta primera etapa se propone al profesor presentar a los estudiantes algunas situaciones donde se evidencie un fenómeno ondulatorio necesario de establecer para lograr abordar la noción de onda que queremos enseñar, en torno a algún contexto específico, algunas de estas situaciones se presentan en la Tabla 1.

TABLA 1
Situaciones propuestas para la exploración de los conocimientos previos

Fenómeno ondulatorio	Contexto propuesto
Interferencia	En muchas series de televisión que vimos cuando niños se mostraba como se rompía un vaso sólo con la voz, ¿crees que eso sea posible?, **explica** brevemente.
Difracción	Piensa en lo que sucede cuando te acercas a alguna fiesta u algún evento donde se escuche música en alto volumen, ¿qué sonido es el primero que escuchas, graves o agudos?, ¿por qué?, **explica**.

Reflexión	Al entrar a una iglesia o un gimnasio muy grande y con poca gente, cualquier sonido que emitas se siente muy intenso y con un "eco", ¿cómo **explicarías** esta situación?
Refracción	Cuando estás en la playa es posible observar que cuando se origina una ola en las profundidades no siempre ésta viene paralela al borde costero, sin embargo al acercarse a la playa se curva de forma tal que el frente de la ola quede paralelo al borde de la playa. ¿Por qué crees que esto sucede?, **explica** brevemente.   *Costa de Concón, Región de Valparaíso, Chile (32°55'18,95'' S, 71°30'29,47'' O), fotografía tomada el 08.02.2011 por Google Earth*.

Para una adecuada implementación de esta actividad se propone dividir a los estudiantes en grupos de a 4 personas y luego les sea entregada una hoja con las cuatro situaciones expuestas en la Tabla 1 (u otras similares que el docente considere apropiadas para el contexto educativo en que se encuentre), en su defecto pueden escribirse las situaciones en la pizarra o proyectarlas desde un computador. Posteriormente indicar a los estudiantes que reflexionen junto a sus compañeros sobre las situaciones expuestas y consensuen una explicación para el fenómeno descrito. Para esta primera etapa se propone acordar con los estudiantes un tiempo de 10 minutos.

Con el objetivo de que las ideas consensuadas por los estudiantes sirvan como base para discusiones posteriores, se sugiere al docente indicar que un representante de cada grupo exponga las principales ideas en relación a cada una de las cuatro situaciones presentadas, y las resuma rescatando palabras o frases claves, por ejemplo, en el pizarrón.

Evaluación de la actividad

Además de la reflexión en plenario que se realiza posterior al trabajo grupal, cada grupo de estudiantes deberá entregar al docente en la misma hoja con las situaciones que les fueron presentadas las reflexiones finales que consensuaron en su grupo de trabajo. Estas serán un insumo para que el docente oriente de mejor forma las actividades en las sesiones posteriores.

Orientaciones al docente

Se propone al profesor favorecer y orientar la implementación de la actividad de forma tal que promueva la *explicación* (una de las CPC que se espera promover con la enseñanza de esta noción). El tiempo estimado para toda la actividad es de unos 30 minutos.

4.4.2 Fase 2: Introducción a nuevos conocimientos

El objetivo de esta fase es que los estudiantes construyan la noción de onda mecánica que queremos promover exponiendo sus posturas personales frente a sus pares, en relación a las actividades a continuación propuestas. Así mismo, el estudiantado será capaz de explicar los fenómenos ondulatorios de refracción, reflexión, interferencia y difracción utilizando como base la concepción de onda mecánica construida.

Con este fin, se recomienda al docente realizar la siguiente secuencia de actividades.

ACTIVIDAD 2
Confección de una Cubeta de Ondas

Los estudiantes deben reunirse en los mismos grupos de trabajo que realizaron la *Actividad 1*. El profesor les entrega a cada grupo una hoja con las siguientes indicaciones:

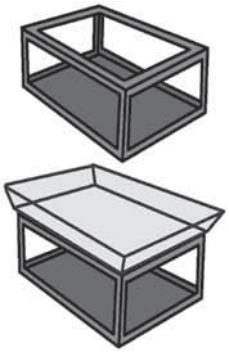
a) Objetivo: Construir de forma colaborativa una cubeta de ondas.

b) Instrucciones: *Junto a tus compañeros de grupo deberás elaborar un artefacto denominado "cubeta de ondas". En ella, es posible observar y analizar algunos fenómenos muy interesantes que estudiaremos en la unidad.*

c) Materiales: *Para comenzar verifica que tienes los siguientes materiales:*

- *Bandeja de vidrio o plástico (transparente),*
- *Linterna,*
- *Caja de zapatos,*
- *Tijeras,*
- *Papel blanco tamaño oficio,*
- *Regla transparente y*
- *Barras de vidrio, policarbonato u otro material transparente.*

d) Procedimiento: *Para construirla sólo deberás recortar la caja de zapatos como lo indica la figura para luego poner la bandeja sobre ella, el papel blanco debes ponerlo como base interior en la caja de zapatos. Luego, deposita un poco de agua sobre la bandeja de forma que no haya más de 1 cm de profundidad.*



Una vez confeccionado este montaje ilumina con la linterna la cubeta de ondas desde la parte superior y notarás que en el papel blanco del fondo se proyectará cualquier perturbación que suceda en el agua y ¡listo!, ahora puedes comenzar a utilizar tu cubeta.

Evaluación de la actividad

Durante este trabajo el docente debe aproximarse a los diversos grupos internalizándose en cada discusión y proceso de construcción del instrumento. De esta forma puede realizar una evaluación por medio de la observación y la vinculación con cada grupo.

Orientaciones para el docente

El tiempo aproximado debe ser de 30 minutos. Es importante que se los indique al iniciar.

Una vez construido el dispositivo experimental "cubeta de ondas", se procede a desarrollar la siguiente actividad.

ACTIVIDAD 3
Descripción del Fenómeno Observado al Perturbar el Agua

Manteniendo los mismo grupos de trabajo. El profesor les entrega a cada grupo una hoja con las siguientes indicaciones:

a) Objetivos:

1. Construir la noción de onda mecánica concebida como un proceso de transmisión de energía a través de un medio elástico y que es originada por la perturbación del mismo.
2. Describir y reconocer los fenómenos ondulatorios específicos como la refracción, la reflexión, la interferencia y difracción.

b) Indicaciones y preguntas para la reflexión:

α) Reflexiona con tus compañeros y escribe una breve descripción y explicación consensuada de lo que el grupo entiende por "onda".

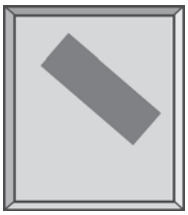
β) Genera una onda en tu cubeta realizando diversos procedimientos. ¿Qué necesitas hacer para generarla? Describe brevemente los procedimientos realizados.

χ) De todos los procedimientos realizados con tu grupo, ¿cuál es el que ha dado mejor resultado?, argumenta tu respuesta.

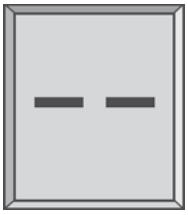
δ) Mientras se propaga la onda producida en la cubeta, ¿qué se observa en el agua cercana a los bordes de la cubeta?, explica lo que aprecias.

ε) Ubica una regla que sobresalga del agua al interior de la cubeta de modo que forme un ángulo, mayor que 0° y menor que 90°,con el frente de onda. A partir de lo que observas ¿qué sucede cuando la onda impacta a la regla? Haz un dibujo o esquema que represente la situación observada utilizando un pliego de papel craft.

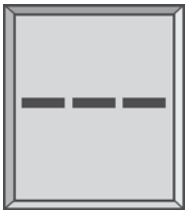
ϕ) Si ahora ubicamos un objeto plano y transparente en la cubeta, como muestra la figura (el objeto tiene la finalidad de disminuir la profundidad del agua en esa zona, por lo que no pasa a la superficie). ¿Qué ocurre con la forma en que se propaga la onda?, realiza en el pliego de papel craft un dibujo que represente lo que observas.



γ) Si ahora ubicamos dos objetos en la cubeta, como muestra la figura (estos objetos tienen la finalidad de presentar obstáculos a la onda por lo que deben sobresalir del agua). ¿Qué ocurre con la forma en que se propaga la onda?, realiza en el pliego de papel craft un dibujo que represente lo que observas.



η) Si ahora ubicamos tres objetos en la cubeta, como muestra la figura (estos objetos tienen la finalidad de presentar obstáculos a la onda por lo que deben sobresalir del agua). ¿Qué ocurre con la forma en que se propaga la onda?, realiza en el pliego de papel craft un dibujo que represente lo que observas.



Evaluación de la actividad:

En base a las observaciones realizadas por los alumnos en cada cubeta y considerando las representaciones por ellos dibujadas en el papel craft se propone al docente seleccionar aquellas que representan los fenómenos ondulatorios observados por los estudiantes de forma más clara. A pesar de esta recomendación, en caso de tener un curso pequeño de alumnos (20 alumnos aproximadamente) es posible considerar todas las representaciones propuestas por ellos.

Orientaciones para el docente

Una vez hecha esta selección se recomienda al profesor mostrar los esquemas frente al curso (pegándolos en una pizarra por ejemplo) y construir en base a ellos la noción de onda mecánica que se quiere enseñar. El tiempo estimado para esta actividad es de 90 minutos.

4.4.3 Fase 3: Sistematización

A partir de las actividades hasta ahora desarrolladas, los estudiantes han podido comprender el proceso mediante el cual se genera una onda mecánica, familiarizándose también con los fenómenos asociados a su propagación a través de un medio material elástico.

En la presente fase, el profesor podrá profundizar en las ideas teóricas relacionadas con las características de las ondas, tales como Amplitud, Frecuencia, Período, Longitud de Onda y Velocidad de propagación, así como también, en procesos de medición, análisis dimensional y unidades de medida.

ACTIVIDAD 4
Sistematización de la Noción de Onda

En esta actividad se propone como objetivo que los estudiantes logren Indagar sobre las relaciones existentes entre las diversas características de una onda.

Para sistematizar la noción de onda mecánica en función de sus características se sugiere al docente orientar la secuencia de aprendizaje con las siguientes intervenciones:

1. A partir de los diagramas realizados por cada grupo, los estudiantes pueden observar los distintos patrones dibujados y responder preguntas tales como; ¿Qué similitudes y/o diferencias puedes percibir entre ellos?, ¿A qué factores puedes atribuirlas? Justifica tu razonamiento. Es recomendable realizar estas preguntas dirigidas a alumnos en específico.

2. Una vez expresadas las opiniones en relación a lo observado en los distintos diagramas, los estudiantes pueden realizar mediciones con reglas sobre el papel y establecer comparaciones con datos cuantitativos. En base a estos datos y las diversas propuestas de los estudiantes, el profesor introduce el término *"longitud de onda"* para referirse a las mediciones realizadas por los estudiantes y sistematizar sus observaciones.

   En este punto es importante que el profesor se posicione sobre las observaciones y opiniones particulares de sus alumnos para construir en ellos la concepción de longitud de onda como la distancia entre dos perturbaciones sucesivas generadas en el medio por el cual se propaga la onda.

3. Del mismo modo, y comparando las diversas longitudes de onda medidas, cada grupo elabora una explicación para este hecho, buscando posibles causas.

4. A partir de las explicaciones consensuadas en cada grupo, el profesor introduce el término *"frecuencia"* para referirse a la cantidad de perturbaciones ocurridas en el medio elástico en un cierto intervalo de tiempo. En este momento el profesor presenta el Hertz como la unidad de medida utilizada para cuantificar la frecuencia. De esta forma, y considerando un simple análisis dimensional, el docente puede establecer la relación entre la frecuencia y el período, presentando esta característica como aquella que permite cuantificar el tiempo que transcurre entre dos perturbaciones sucesivas de un mismo punto del medio. Se sugiere que el docente en todo este proceso relacione permanentemente los nuevos términos introducidos con ejemplos relacionados con la actividad realizada de forma previa por los estudiantes.

5. Se sugiere concientizar a los estudiantes respecto a la dificultad que supone realizar mediciones del período de una onda directamente, motivo por el cual, si queremos conocer el valor del período de cada una de las ondas generadas previamente, podemos recurrir a un cálculo numérico sencillo derivado de los datos obtenidos para la frecuencia previamente:

$$T = 1 / f$$

6. En este momento es interesante proponer a los estudiantes que establezcan comparaciones entre los períodos, las frecuencias y las longitudes de onda encontradas en cada dibujo para obtener relaciones de proporcionalidad entre dichas características.

λ es proporcional a T

λ es inversamente proporcional a f

7. En base a estas conclusiones, el docente expresa a modo de síntesis la relación existente entre la longitud de onda, la frecuencia y el período, introduciendo el concepto de rapidez de propagación, para referirse a la razón entre la distancia que recorre la onda y el determinado tiempo en que lo hace:

$$v = \lambda \cdot f \qquad \text{y} \qquad v = \lambda / T$$

Evaluación de la actividad

El docente permanentemente, a través de la observación del trabajo grupal y las intervenciones individuales, evalúa el aprendizaje de los estudiantes. Es importante interpretar en cada momento estas acciones para incorporarlas a lo largo de la misma actividad. Es así como construimos cada noción particular sistematizando la noción completa de onda mecánica.

Orientaciones al docente

Se sugiere al docente establecer claramente las unidades de medida utilizadas para la medición de todas y cada una de las nuevas concepciones introducidas en esta fase. El tiempo estimado para esta actividad es de 90 minutos.

4.4.4 Fase 4: Aplicación

En esta fase se propone que sean los mismos estudiantes quienes propongan y modelen distintos fenómenos experimentales con la intensión de promover el descubrimiento de la noción de onda por parte de otros estudiantes a partir de diversos fenómenos ondulatorios. En otras palabras, los alumnos deben diseñar una actividad experimental con la intensión de enseñar la noción de onda a otros estudiantes.

ACTIVIDAD 5
Construcción de una Actividad Experimental

Los estudiantes reunidos en los mismos grupos de trabajo deberán elaborar un instrumento de aprendizaje con la intensión de enseñar a otros estudiantes la noción de onda que ellos ya han aprendido. Para realizar adecuadamente esta actividad se les entregará a cada grupo de trabajo un material escrito que contenga las siguientes instrucciones.

a) Objetivo: Aplicar los nuevos aprendizajes para diseñar una actividad experimental que sea utilizada para enseñar a otros estudiantes la noción de onda mecánica que han aprendido.

b) Procedimiento: En los mismos grupos de trabajo que han realizado las actividades anteriores realicen *un instrumento de aprendizaje para que estudiantes de otro establecimiento educacional comprendan la*

noción de onda mecánica que ustedes han aprendido. Para ello deben guiarse por la siguiente sugerencia de pauta:

- Elaboren el instrumento descrito incluyendo las siguientes secciones.
  - Título de la actividad,
  - nombre de los estudiantes, curso y fecha,
  - instrucciones para realizar esta actividad,
  - desarrollo de la actividad
  - conclusiones.
- En la sección de *instrucciones para realizar esta actividad* indiquen la cantidad de estudiantes que deberán trabajar en el grupo y las precauciones si son necesarias antes de realizar cualquier experiencia.
- En la sección *desarrollo de la actividad* deben indicar inicialmente el objetivo de la misma y luego plantear alguna situación cotidiana a la realidad de los estudiantes o de carácter experimental donde sea posible observar algún fenómeno ondulatorio. Formulen preguntas para que los estudiantes puedan reflexionar en torno a lo observado en dicho fenómeno presentado.
- La secuencia de preguntas que realicen debe ser tal que les permitan a los estudiantes indagar respecto a la noción de onda implícita en las situaciones. Guíense por las preguntas planteadas por vuestro profesor en las clases anteriores.
- En la sección *conclusiones*, deben lograr que los estudiantes enuncien por sí mismos la noción de onda que han aprendido y que ustedes ya conocen.
- Deben realizar actividades creativas donde utilicen la cotidianeidad de los estudiantes a los que está dirigida la actividad. Pueden incluir actividades con la cubeta de ondas, para ello debe también incorporar las instrucciones para construirla.

c) Evaluación: Finalmente entreguen al profesor la guía de actividades diseñada, junto a una reflexión grupal donde expresen la facilidad o complejidad con la cual se enfrentaron a este trabajo.

4.5 Reflexiones finales

Si bien es cierto que la enseñanza de Ondas en la escuela puede resultar una tarea compleja, consideramos importante tratar el contenido desde un punto de vista fenomenológico que promueva la observación, reflexión y discusión en torno a situaciones provenientes del contexto cotidiano de los estudiantes. De esta forma, promovemos el desarrollo de competencias de pensamiento científico que trascienden a la disciplina y que son importantes de fomentar en los niños y jóvenes en etapa escolar tales como la Argumentación y Explicación.

La actividad científica escolar requiere que el estudiantado constantemente se plantee problemas y se cuestione sobre los fenómenos del mundo que les rodea, para lo cual la enseñanza de la física puede generar los espacios necesarios en que nuestros estudiantes exploren sus capacidades.

Como hemos visto, el capítulo ante ustedes presentado, busca fomentar el trabajo grupal y experimental, a través de variedad de actividades y la reflexión en torno a situaciones no ajenas al mundo cercano del estudiante, que en su conjunto permiten construir aprendizajes basado en la indagación sobre un contenido complejo como es “onda mecánica”, pero donde la noción misma construida no es más que una forma de interpretar la realidad observada.

Consideramos fundamental para el éxito de estas y otras propuestas similares que el profesor fomente en los estudiantes la capacidad de asombro, de reflexión y de cuestionamiento sobre el propio aprendizaje, y que genere los espacios para que sean ellos los que interactúen con los fenómenos estudiados.

Finalmente, destacamos con esta secuencia el cómo a través del desarrollo de competencias de pensamiento científico podemos transformar en verdaderas instancias de aprendizaje, temas y contenidos que desde una formación tradicional podrían ser verdaderamente complejos de enseñar.

Referencias bibliográficas

Chamizo, J y García, A. (2010). Modelos y Modelaje en la Enseñanza de las Ciencias Naturales. Universidad Nacional Autónoma de México.

Hernández, C. (2011) Identificación de los indicios de calidad en la transición de los libros de texto de papel hacia los libros digitales: El caso de las Ondas. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona, España. Disponible en red http://www.tdx.cat/handle/10803/79121 , marzo de 2013.

Maurines, L. (1992). Spontaneus reasoning on the propagation of visible mechanical waves. International Journal of Science Education, 14 (3), 279 – 293.

Welti, R. (2002). Concepciones de estudiantes y profesores acerca de la energía de las ondas. Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y experiencias didácticas 20, 261 -270.

Logiurato, F. (2012): Teaching waves with goggle earth. Phys. Educ. 47 pp. 73-77. Disponible en http://arxiv.org/pdf/1201.0001.pdf

Capítulo 5

Estática de los Fluidos
Una Unidad Didáctica para Educación Media

Jorge Pinochet

Contenido

- *Resumen*
- *Presentación*
- *Planificación docente*
- *Desarrollo de la unidad didáctica*
- *Referencias bibliográficas*

Resumen

El presente capítulo tiene como propósito poner a disposición del profesorado de Física de Educación Media, una unidad didáctica fundamentada desde la Naturaleza de la Ciencia (NOS), y la Historia de la Ciencia (HPS). La temática específica que se aborda en esta unidad, es el estudio de los fluidos en reposo, es decir, la Hidrostática, cuyos conceptos, principios y leyes fundamentales poseen una gran importancia práctica, y al mismo tiempo se prestan fácilmente para la realización de actividades experimentales simples, y de gran interés para los estudiantes. Para alcanzar nuestro objetivo, la unidad didáctica se articula en torno al desarrollo de diversas actividades teóricamente fundamentadas, que pretenden que los alumnos/as participen activamente en la construcción del conocimiento, promoviendo el debate, la argumentación y la explicación, como competencias fundamentales para el desarrollo del pensamiento científico.

5.1 Presentación

5.1.1 Una mirada histórica a la hidrostática

Los historiadores coinciden en señalar al científico griego Arquímedes (287a.C.-212a.C.), como el fundador de la hidrostática, pues fue el primero en estudiar sistemáticamente el comportamiento de los fluidos en reposo, plasmando sus hallazgos en la obra *De los Cuerpos Flotantes,* donde introduce su célebre principio de flotabilidad. Es interesante señalar, que dicho principio no fue enunciado por Arquímedes en la forma que hoy en día lo conocemos, pues en aquel entonces faltaban casi dos milenios, para que el formalismo matemático comenzara a emplearse sistemáticamente en la Física (Bell, 1985). Una leyenda muy conocida, atribuye el descubrimiento del principio de flotabilidad a una pregunta que formulara a Arquímedes el rey Hierón de Siracusa, quien deseaba averiguar si una corona de oro, cuya fabricación había encargado a un orfebre, era efectivamente de oro. Estando en los baños públicos, se cuenta que Arquímedes notó que su cuerpo sumergido perdía peso y que desalojaba una cierta cantidad de agua, y estas dos constataciones le habrían conducido a la solución del problema planteado por Hierón. Eufórico por la alegría que le habría provocado tal descubrimiento (Strathern, 1999), Arquímedes salió desnudo de los baños públicos y comenzó a correr por la calle gritando *eureka* "lo encontré". De ser cierta, esta historia revela un aspecto muy interesante en el desarrollo del conocimiento científico: los conceptos y teorías científicas no sólo son el resultado de la pura curiosidad intelectual, sino que también suelen estar vinculadas con intereses prácticos, y con la resolución de problemas de la experiencia cotidiana.

Durante el siglo XVI, el belga Simon Stevin (1548-1620), junto con establecer la relación que proporciona la presión dentro de un fluido, formuló nuevamente

el principio de Arquímedes tomando como base de sus razonamientos la imposibilidad del movimiento perpetuo, complementando este trabajo con un estudio acerca de la estabilidad de los cuerpos flotantes. Aquí vemos un ejemplo, de que una misma ley física puede ser estudiada y explicada adoptando diferentes enfoques, y empleando teorías en apariencia muy disímiles.

Algunas décadas más tarde, el francés Blas Pascal (1623-1662), precisa la noción de presión en el interior de un fluido, y estudia experimentalmente la disminución de la presión con la altura, estableciendo el célebre principio que lleva su nombre: *Si un recipiente lleno de agua y cerrado por completo, tiene dos oberturas, una cien veces mayor que la otra, al colocar en cada una un pistón, un hombre que hunda el pistón pequeño igualará la fuerza que cien hombres que empujen al que es cien veces mayor*. No conforme con sus estudios teóricos y experimentales, Pascal se interesó mucho en el potencial tecnológico de la hidrostática, aplicando con éxito su principio a las prensas hidráulicas.

Por la misma época en que Pascal realizara sus contribuciones a la hidrostática, otros grandes científicos aportaban al estudio teórico y práctico de los fluidos. Es así como el francés René Descartes (1596-1650), inventa un curioso artefacto conocido como Diablillo o Ludión, cuyo funcionamiento se basa en los principios de Arquímedes y Pascal, y que tal como su nombre lo indica, tenía un carácter eminentemente lúdico, pues no respondía a ninguna finalidad práctica; paralelamente a esta invención, el padre de la ciencia moderna, el italiano Galileo Galilei (1564-1642), enuncia el principio de los vasos comunicantes; el inglés Robert Hooke (1635-1703), utiliza la horizontalidad del nivel de un líquido para construir el primer *nivel de alcohol*, y el científico italiano Torricelli (1608-1647), construye el primer instrumento para medir la presión atmosférica, el barómetro, introduciendo la audaz hipótesis de que la estabilidad de la columna de mercurio se debía a la existencia de la presión atmosférica, lo cual sería corroborado más tarde por Pascal en sus célebres experimentos de Puy-de-Dome, a partir de los cuales concluye que la presión atmosférica disminuye con la altura.

A Torricelli se le considera el fundador de la hidrodinámica, cuyo objeto de estudio son los fluidos en movimiento. En 1644 aplica las leyes de la caída libre de los cuerpos, establecidas por su maestro Galileo, para estudiar la salida de los líquidos por un orificio. Sin embargo, fue el suizo Daniel Bernoulli (1700-1782), quien sistematizó y unificó los conocimientos acerca del comportamiento de los fluidos en su gran obra *Hidrodinámica*, donde introduce la ecuación que lleva su nombre, y que constituye la base para el estudio de los fluidos, ya sea en reposo o en movimiento (Guillén, M. 2000). A partir de la ecuación de Bernoulli se obtiene como caso particular la denominada *ecuación fundamental de la hidrostática*, que resulta de suponer que la rapidez de un fluido es nula.

Desde la formulación de la ecuación de Bernoulli, la hidrodinámica se ha enriquecido con diversos aportes que han permitido llegar a una formulación rigurosa y acabada, de la mecánica de los fluidos, principalmente gracias a los trabajos del físico e ingeniero francés Claude-Louis Navier (1785-1836), y del matemático y físico irlandés George Gabriel Stokes (1819-1903). Las relaciones matemáticas que llevan el nombre de estos dos ilustres científicos (ecuaciones de Navier-Stokes), constituyen un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales no lineales, que describen el movimiento de un fluido. Estas ecuaciones son de una extraordinaria generalidad, pues gobiernan fenómenos tan diversos como el movimiento de la atmósfera terrestre, las corrientes oceánicas, el flujo alrededor de vehículos o proyectiles, etc.

Un importante problema, abierto respecto de estas ecuaciones es la determinación de si, partiendo de unas condiciones iniciales del movimiento de un fluido suave y laminar, la solución de las ecuaciones para todo instante de tiempo, implica también un flujo suave y laminar. Esta pregunta constituye uno de los *Problemas del Milenio* que el Instituto de Matemáticas Clay, premia con un millón de dólares estadounidenses a quién pueda resolverlo[3].

5.1.2 Enseñanza de la Hidrostática en la Educación Media

La enseñanza tradicional de la hidrostática, ha estado fuertemente dominada por una concepción reduccionista de la educación científica, donde el objetivo fundamental consiste en abordar una serie de contenidos curriculares, que dejan de lado aspectos fundamentales del proceso enseñanza-aprendizaje, como es el desarrollo de competencias de pensamiento científico (Quintanilla), la vinculación entre teoría y experiencia que conduce a un aprendizaje significativo (Ausubel), o la puesta en juego de actividades y metodologías que permitan superar el plano puramente instrumental-operativo, donde suele desarrollarse la enseñanza de la ciencia (Labarrere y Quintanilla, 2002).

Durante las últimas décadas, y en la medida que la Didáctica de las Ciencias se ha ido consolidando como una disciplina autónoma (Aduriz-Bravo), han surgido diversas estrategias y metodologías de enseñanza, que se han enriquecido con los avances experimentados en las metaciencias como la Naturaleza de la Ciencia (NOS), y la Historia se la Ciencia (HPS), propiciando una educación científica basada en la promoción de competencias (Camacho y Quintanilla, 2008), y en la incorporación de contenidos intencionalmente seleccionados, transpuestos y con valor para la educación científica, que permiten pensar sobre las ciencias (Adúriz-Bravo, 2008), y sobre cómo se construyen y problematizan (Matthews, 1989). Los aportes de estás metaciencias contribuyen a que los estudiantes no aprendan

3 http://claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations/

sólo a resolver problemas, sino que también sean capaces de desplegar su actividad metacognitiva, reflexionando acerca de cómo lo hacen y por qué utilizan determinadas habilidades y destrezas y no otras. Así, la resolución de problemas, puede ser vista como una competencia de pensamiento científico (Quintanilla, 2006), imprescindible para los estudiantes de ciencias (Couso, 2008). La resolución de problemas vista como una competencia de pensamiento científico, puede considerarse desde los planos de análisis y desarrollo a partir de los cuales, el estudiante puede enfrentarse a la resolución de problemas escolares en diferentes niveles: a) el plano instrumental–operativo, b) el plano personal significativo, y c) el plano relacional social (o cultural) (Labarrere y Quintanilla, 2002).

Así, a través de esta Unidad Didáctica se pretende mostrar una imagen dinámica, transformadora y problemática del mundo, por lo cual se hace especial énfasis en conectar los modelos teóricos de la hidrostática, con la realidad del estudiantado para promover Competencias de Pensamiento Científico, a través de situaciones específicas que permiten comprender qué es ciencia (NOS), y cómo se construye (HPS).

5.2 Planificación Docente

TABLA 1
Planificación docente

Unidad: Hidrostática		
	Hidrostática	
Contenido científico	Conceptual	• Estados de la materia, propiedades de los fluidos, densidad, presión en un fluido, flotabilidad.
	Procedimental	• Distinguir entre fluidos (gases y líquidos) y sólidos rígidos, explicando sus propiedades básicas en términos de los átomos y moléculas que los conforman. • Caracterizar en términos cualitativos y cuantitativos, la presión en un fluido. • Comprender la ecuación fundamental de la hidrostática y algunas de sus aplicaciones prácticas. • Aplicar los principios de Arquímedes y Pascal, para explicar fenómenos naturales y el funcionamiento de algunos dispositivos tecnológicos.

	Actitudinal	• Criticar constructivamente en torno a problemáticas científicas. • Respetar y tolerar las ideas de cada estudiante. • Desarrollar autonomía en el desarrollo de actividades científicas.
Objetivos	• Comprender los conceptos y leyes físicas fundamentales, que describen el comportamiento de los fluidos en reposo, para explicar fenómenos naturales y el funcionamiento de diversos dispositivos y aparatos tecnológicos.	
Objetivos específicos	• Identificar las preconcepciones de los estudiantes en relación con las nociones y leyes básicas de los fluidos en reposo. • Identificar y caracterizar las propiedades microscópicas y macroscópicas básicas de un fluido. • Comprender y aplicar la ecuación fundamental de la hidrostática, y los principios de Arquímedes y Pascal, tanto en el aire como en distintos líquidos.	
Aprendizajes esperados	• Comprenden las características básicas de un fluido, y las distinguen de aquellas que definen a los sólidos rígidos, empleando el modelo atómico y molecular para explicar las propiedades de un fluido, y los efectos de la presión. • Emplean la ecuación fundamental de la hidrostática para estudiar fenómenos diversos y, en especial, para entender las variaciones de la presión con la profundidad en un fluido. • Aplican la ecuación fundamental de la hidrostática, para comprender el funcionamiento de distintos dispositivos y fenómenos del entorno. • Comprenden el principio de Pascal, y lo aplican para analizar la operación de algunas máquinas multiplicadoras de fuerzas que están presentes en diversas tecnologías. • Comprenden el principio de Arquímedes y aplican las condiciones de flotabilidad a situaciones y dispositivos diversos.	
Destinatarios	Estudiantes de III medio	
Temporalidad	19 horas	
Materiales	Los materiales requeridos se especifican claramente en cada actividad, cuando corresponde.	

5.3 Desarrollo de la Unidad Didáctica

A continuación, se propone una serie de actividades enmarcadas en el Ciclo de Aprendizaje Constructivista (Sanmartí, 2000), el cual se desarrolla en cuatro fases: 1 *Exploración*; 2. *Introducción de nuevos conceptos*; 3. *Sistematización* y 4. *Aplicación*.

5.3.1 Exploración

Objetivo: Identificar las preconcepciones que posee el estudiantado acerca de las nociones y leyes básicas de la hidrostática, así como de algunas de sus diversas aplicaciones prácticas.

Actividades: La actividad que se describe a continuación, consiste en la aplicación de un KPSI, cuyo propósito consiste en identificar las preconcepciones de los estudiantes, acerca de algunos conceptos y leyes fundamentales de la hidrostática. Mediante la identificación y caracterización de estas preconcepciones, el/la profesor/profesora dispondrá de evidencias que le permitirán potenciar el aprendizaje de sus estudiantes. Una vez terminadas estas actividades, se sugiere realizar un plenario o puesta en común de las ideas de los estudiantes, de manera de conocer las distintas opiniones para favorecer la construcción conjunta del conocimiento.

ACTIVIDAD 1
KPSI. Las Nociones Fundamentales de la Hidrostática.

Vamos a comenzar esta nueva unidad, que trata de la Hidrostática, intentando descubrir qué piensas y cómo te representas las nociones fundamentales de esta rama de la física. Para ello, te solicitamos que respondas con transparencia y serenidad, el instrumento que aparece a continuación, pues a través de tus respuestas, podremos mejorar tu comprensión de las temáticas que nos proponemos abordar.

Utilizando las categorías que se presentan a continuación, marca con una x en el recuadro que corresponda, según tu apreciación personal, de acuerdo a lo afirmado en cada anunciado:

Categorías:

1. Podría explicarlo a un(a) compañero(a)
2. Lo sé
3. No lo entiendo
4. No lo sé

Enunciado		1	2	3	4	Justificaciones
1	Las diferencias entre sólidos, líquidos y gases se pueden explicar en base a la constitución atómica de la materia.					
2	La presión es una magnitud escalar, mientras que la fuerza es una magnitud vectorial.					
3	La presión ejercida por un fluido sólo depende de la profundidad, y aumenta con ésta.					
4	La fuerza de empuje que actúa sobre un cuerpo sumergido total o parcialmente en un fluido, no depende de la masa de dicho cuerpo.					
5	La presión ejercida en un punto de un fluido, se transmite íntegramente a cada punto de éste.					

A. *Indicaciones para el/la profesor/profesora*. Se propone realizar la actividad anterior entregándole a cada estudiante el instrumento KPSI. Una vez finalizada esta actividad, se retiran las respuestas para efectuar una evaluación diagnóstica.

B. *Indicaciones para el/la profesor/profesora*. Una vez que los estudiantes hayan respondido el instrumento, se sugiere realizar una "lluvia de ideas", a partir de las diversas respuestas y justificaciones para cada uno de los enunciados. Junto con ello, es conveniente escribir en la pizarra la mayor cantidad de justificaciones y, de preferencia, que ellas difieran lo más posible unas de otras, a fin de promover la participación de todos los alumnos/as.

5.3.2 Introducción de Nuevos Conocimientos

Objetivo: En esta etapa, se persigue que los/las alumnos/as comprendan las propiedades microscópicas y macroscópicas básicas de los fluidos, que se introduzcan en la noción cuantitativa y cualitativa de presión, que tengan una primera aproximación a la ecuación fundamental de la hidrostática que relaciona presión y profundidad, y que comprendan en sus aspectos generales, los principios de Arquímedes y Pascal; todo ello, sin perder de vista la importancia de promover la cooperación entre los estudiantes, para que se produzca un avance conjunto del grupo-clase, en la resolución de las tareas propuestas.

Actividades: En esta fase de la unidad, se introducen actividades que se desarrollan a partir de situaciones concretas, con el propósito de ir analizándolas paso a paso, utilizando progresivamente lenguajes más abstractos. Es decir, primero se intenta situar las actividades en un nivel cercano a la experiencia cotidiana, para luego pasar a representar las acciones y las ideas con un lenguaje más científico y formalizado. Todo ello, para aumentar el nivel de apropiación de las acciones por parte de los/las alumnos/as, desde formas próximas a sus experiencias simples y concretas, hasta formas mentales internas. Junto con ello, las actividades también pretenden promover el debate, la argumentación y la explicación en torno a cada uno de los fenómenos estudiados.

ACTIVIDAD 2
Sólidos, Líquidos y Gases, y la Constitución Microscópica de la Materia

En base a tu experiencia, te proponemos que hagas una lista de diferentes materiales u objetos, y que los clasifiques según su estado: sólido, líquido y gaseoso. Luego de ello, intenta enumerar sus principales propiedades observables (macroscópicas), destacando las diferencias. Finalmente, con la guía de tu profesor, intenta formular un modelo simple que explique las diferencias básicas entre sólidos, líquidos y gases, en base a la constitución atómica y molecular de la materia. También puedes realizar esquemas o dibujos que permitan dar cuenta de tu modelo, suponiendo, en primera aproximación, que los átomos y moléculas son similares a minúsculas esferas.

Indicaciones para el profesor/profesora:

Es importante orientar a los estudiantes, para que sean capaces de reconocer que los sólidos poseen una forma propia y volumen bien definidos, mientras los líquidos tienen un volumen bien definido pero una forma que se adapta al recipiente que los contiene, y los gases presentan una tendencia a ocupar

todo el espacio disponible, adaptándose al recipiente que los contiene. También puede ser interesante mostrar situaciones anómalas, como el caso del vidrio, que no resulta fácilmente clasificable en un estado definido de la materia.

Respecto de la formulación del modelo microscópico de la materia, resulta fundamental la guía del docente, quien debe procurar que el modelo sea lo más coherente posible y que dé cuenta, si no de todas, al menos de un número significativo de las propiedades de la materia identificadas antes. Una vez que los y las estudiantes hayan formulado sus modelos, conviene describir en términos muy elementales las ideas que sobre este tema ha tenido la física clásica, refiriéndose a átomos, moléculas, fuerzas eléctricas de cohesión, etc.

ACTIVIDAD 3
El Elefante y los Tacones de la Dama

Lee atentamente el texto que se presentan a continuación, anota tus conclusiones y dudas, y subraya lo que te parezca relevante.

Una mujer que lleva zapatos de tacón alto, pone cerca del 50% de su peso total en un solo tacón cuando está detenida o cuando camina, lo cual es razonable pues el peso que la dama ejerce sobre el suelo se distribuye por igual entre sus dos pies. Si en vez de una dama, pensamos en un elefante parado en sus cuatro patas, es fácil darse cuenta que este cuadrúpedo pone alrededor de un 25% de su peso en cada pata. Si ahora te dieran a escoger entre ser pisado por el tacón de una delicada y bella dama de 57 *kg, y un elefante de* 3.700 *kg (¡casi cuatro toneladas!), ¿cual escogerías? Aunque muchas personas se sentirían tentadas a responder de forma automática, que preferirían a la dama, la verdad es que la pregunta anterior no puede ser respondida sin antes conocer el área de la base de los tacones y el área de la pata de un elefante. Supongamos que el tacón de la dama tiene un área de* 6,5 cm^2 *mientras que en el caso del elefante, el área es de* 1.134 cm^2 *(suponemos que la base de la pata es circular). Quizá te sorprenda saber que un simple cálculo, muestra que es mejor recibir el pisotón del elefante. Más aun, la presión ejercida por el tacón de la dama será del orden de cinco veces la del elefante. Si ahora suponemos que el tacón de la dama es de sólo* 1 cm^2 *la situación se vuelve aun más dramática, pues el pisotón de la dama ejercerá una presión de aproximadamente* 32 *veces la del elefante*.

Esta curiosa anécdota genera diversas preguntas que te sugerimos discutas con tus compañeros y con tu profesor:

- ¿Cómo se explica que la presión de la dama sea, en ambos casos, superior a la del elefante?
- ¿Por qué la presión de la dama se modifica al variar el área de la base de sus tacones?
- A partir de la discusión suscitada por las preguntas anteriores, ¿qué puedes concluir acerca de la relación entre fuerza y presión?
- ¿Cómo relacionas la anécdota de la dama y el elefante, con la capacidad que tiene un cuchillo o una tijera de cortar diversos objetos?

Indicaciones para el/la profesor/profesora:

Se sugiere que el/la profesor/a realice los cálculos correspondientes a la actividad anterior, que por lo demás son muy sencillos, pues ello permite que los/las estudiantes se familiaricen y adquieran soltura en el manejo de las fórmulas básicas de la hidrostática. Aprovechando esta instancia, también es aconsejable discutir en plenario las preguntas anteriores, para reforzar los aciertos y corregir los posibles errores.

ACTIVIDAD 4
Un Enorme Océano de Aire

Como quizá sepas, nos encontramos sumergidos en un gigantesco océano de aire al que denominamos *atmósfera*. El aire es un fluido al igual que el agua, razón por la cual comparten muchas propiedades. Ahora te proponemos una actividad práctica muy simple, que te permitirá comprender una importante propiedad de la presión que actúa en un fluido, pues lo que descubras mientras estás sumergido en nuestro gigantesco océano de aire, también se aplica a un océano de agua, una piscina o un vaso con leche. Para realizar esta actividad necesitas un embudo, de preferencia plástico (por razones de seguridad), un elástico y un trozo de globo de cumpleaños (Figura 1).

Procedimiento:

Tapa la parte ancha del embudo con un trozo de globo de cumpleaños, usando un elástico para que el trozo quede bien adherido. La siguiente figura ilustra estas ideas. Luego, absorbe aire por la parte angosta del embudo y

observa lo que ocurre con la membrana del globo. Ahora, mueve el embudo en otras direcciones repitiendo la acción anterior, y verifica si se produce algún cambio.

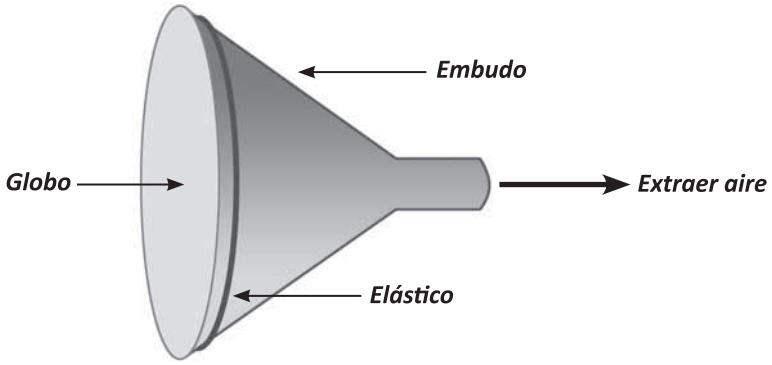


Figura 1. Esquema de los elementos de la actividad.

- ¿Qué le ocurre a la membrana del globo mientras absorbes aire?
- ¿Cómo explicas lo observado? Intenta relacionar tu explicación, con el modelo formulado antes para la constitución atómica y molecular de la materia.
- ¿Qué conclusiones puedes extraer, acerca de la forma en que actúa la presión en el interior de un fluido?

Indicaciones para el/la profesor/profesora:

La actividad puede ser realizada en grupos, o puede ser demostrativa y realizada por el/la profesor/a. Lo fundamental de esta actividad, es que los estudiantes reconozcan que la presión sobre un objeto sumergido en un fluido, actúa con independencia de la orientación, de modo que la fuerza debida a esta presión se ejerce en todas direcciones. Por otra parte, es conveniente socializar las preguntas, vincularlas con la actividad 3, y aprovechar esta instancia para reforzar las ideas correctas, para corregir los posibles errores, y para propiciar la discusión, la argumentación y la explicación de los fenómenos en estudio.

ACTIVIDAD 5
Una Pila de Libros y la Ecuación Fundamental de la Hidrostática

En esta actividad, vamos a establecer una analogía entre las propiedades de la presión ejercida por una columna de líquido, y por una pila de libros, lo cual nos permitirá comprender el significado de la ecuación fundamental de la hidrostática. Para realizar la actividad es necesario disponer de cinco libros y apilarlos cuidadosamente uno sobre otro.

Supongamos que los cinco libros se encuentran apilados sobre una mesa. Levanta toda la pila de libros sosteniéndola con cuidado desde el libro que se encuentra más abajo. Deposita todos los libros sobre la mesa y repite las acciones anteriores, levantando todos los libros excepto el que está más abajo, de modo que ahora levantas sólo cuatro libros. Ahora repite lo anterior pero levantando tres libros, dejando los dos inferiores sobre la mesa, y continúa con este procedimiento hasta que levantes sólo un libro. Ahora intenta responder las siguientes preguntas:

- ¿Cómo es el esfuerzo realizado en cada una de las etapas de la experiencia?
- ¿Cómo se compara la fuerza y la presión que soporta el libro que está debajo de la pila, en relación a los libros que están encima?
- Si empleas la analogía entre la pila de libros y una columna de líquido en un recipiente, ¿cómo varía la presión en función de la profundidad en el líquido?
- ¿Cuál es la principal limitación de esta analogía, si la relacionas con la actividad anterior, cuando movías el embudo en todas direcciones?

La ecuación fundamental de la hidrostática, establece una relación entre la presión dentro de un líquido, y la profundidad respecto del nivel de líquido. La expresión matemática de esta ley es la siguiente:

$$P = \rho g h$$

En esta ecuación, P es la presión de un líquido a una profundidad h, ρ (la letra griega "rho") representa su densidad (que suponemos constante para cada líquido), y g es la aceleración de gravedad (9,81m/s^2), de modo que P sólo es función de h. Usando un poco de matemáticas, y con la ayuda de tu profesor, es fácil deducir esta ecuación usando como analogía la pila de libros. Sin embargo, lo importante es notar la relación entre P y h. ¿Cómo

relacionas esta ecuación con las conclusiones extraídas de la experiencia con la pila de libros? ¿Es razonable la dependencia que existe entre *P* y *h*?

La ecuación que te acabamos de presentar, solo contiene la presión ejercida por la columna de líquido, así que debemos sumarle la presión P_0 debida a la columna de aire de la atmósfera, de modo que la forma completa de la ecuación es la siguiente:

$$P = P_0 + \rho g h$$

Indicaciones para el/la profesor/profesora: Esta actividad, proporciona una excelente oportunidad para realizar una deducción elemental de la ecuación fundamental de la hidrostática, basada en la analogía entre una pila de libros y una columna de líquido, tal como se sugiere a continuación. La realización de deducciones sencillas es relevante, porque permite al estudiante comprender que la matemática ayuda a la construcción del conocimiento científico, y que las fórmulas empleadas en la física no son arbitrarias, sino que obedecen a una lógica basada en la observación y en la experimentación.

Supongamos que la masa de la pila de libros es *m* y que su altura es *h*. Por simplicidad, asumamos que todos los libros tienen exactamente las mismas dimensiones. El peso de la columna completa será *mg*, de modo que la presión *P* ejercida por la pila sobre la mesa, será igual al peso de la pila dividido por su área de contacto con la mesa, es decir, será igual al área *A* de la tapa del libro de más abajo, dividida por *mg*:

$$P = \frac{peso}{área} = \frac{m\,g}{A} \quad (1)$$

Por otra parte, sabemos que la densidad de un cuerpo está dada por la relación:

$$\rho = \frac{masa}{volumen} = \frac{m}{V} = \frac{m}{A\,h}$$

De esta expresión se deduce:

$$m = \rho\, A\, h \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$P = \frac{\rho g A h}{A} = \rho\, g\, h$$

Dado que en nuestra deducción, sólo hemos considerado la presión ejercida por la pila de libros, debemos agregar la presión P_0 ejercida por la atmósfera:

$$P = P_0 + \rho\, g\, h \quad (3)$$

ACTIVIDAD 6
El Diablillo de Descartes

El gran filósofo y matemático francés René Descartes, no sólo ocupaba su tiempo en resolver los grandes problemas de la filosofía, sino que en medio de sus profundas reflexiones, se tomó el tiempo de construir un dispositivo muy ingenioso llamado Diablillo o Ludión. Lo de diablillo proviene del endiablado comportamiento del dispositivo, y lo de Ludión proviene de la palabra lúdico, pues el invento de Descartes también tiene fines recreativos. En la siguiente actividad, te proponemos construir un Diablillo muy simple, que podrás utilizar para comprender los principios de Arquímedes y Pascal.

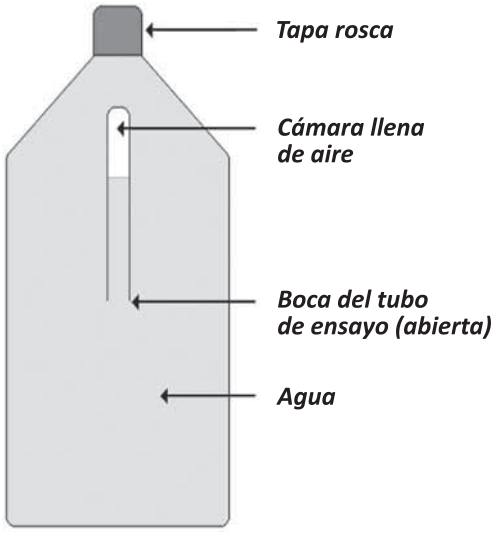


Figura 2. Los elementos básicos de un ludión.

Figura 3. Un ludión de fabricación casera.

Instrucciones: El primer paso consiste en llenar completamente la botella con agua, tal como muestran las figuras 2 y 3. Acto seguido, debemos verter un poco de agua dentro del tubo de ensayo, hasta aproximadamente la mitad de su capacidad total. Este último paso es fundamental pues, como veremos pronto, de otro modo el ludión no podrá funcionar. A continuación, se debe tomar el tubo de manera que el dedo pulgar tape su boca lo más herméticamente posible, para evitar que en la siguiente etapa el agua se derrame. Ahora, gira el tubo boca abajo, acércalo al gollete de la botella, y al mismo tiempo que retiras tu pulgar, introduce el tubo rápidamente en la botella. Concluido esto, coloca la tapa rosca firmemente en su lugar. Si las acciones anteriores han sido ejecutadas correctamente, el tubo de ensayo debiera flotar dentro de la botella, manteniéndose en contacto con la tapa rosca; además, debe existir una columna de aire en la parte superior del tubo, pues este no fue llenado por completo con agua, y por la forma en que construimos el diablillo, el aire queda atrapado una vez que se introduce el tubo en la botella (ver figura 2). Si el tubo no flota del modo descrito, repite los pasos anteriores desde el comienzo, modificando ligeramente la cantidad de agua vertida en el tubo, y procurando ser muy cuidadoso al momento de introducirlo en la botella. Por ensayo y error, no debiera tomarte mucho tiempo encontrar la forma adecuada de construir tu ludión.

Ahora que tenemos nuestro diablillo listo para ser utilizado, coloca una de tus manos sobre la botella, y ejerce presión sobre ésta, cerrando tus dedos con firmeza pero también con lentitud. Modifica la presión que ejercen tus dedos y observa atentamente lo que sucede.

- Al ejercer una presión sobre la botella, ésta tiene un efecto sobre el nivel de líquido dentro del tubo de ensayo. ¿Cómo explicas este fenómeno?
- La variación del nivel de líquido dentro del tubo, provoca que éste ascienda y descienda. ¿Cuál es la explicación de este movimiento?
- ¿Podrías relacionar el funcionamiento del Diablillo con la forma en que operan los barcos y los submarinos?

La correcta respuesta a las preguntas anteriores es la siguiente: El gotero se hunde debido a que al aumentar la presión de la botella se introduce agua al interior del tubo de ensayo, reduciendo el volumen de aire y aumentando la masa del sistema tubo+agua+aire al punto de superar la fuerza boyante generada por el agua debajo de él. Al soltar la botella la columna de aire dentro del tubo de ensayo aumenta de volumen, desplazando parte del agua introducida y reduciendo el peso del gotero al punto de ser menor

que la fuerza boyante ejercida por el agua. La relación entre la presión aplicada y el volumen de aire confinado dentro del gotero es inversamente proporcional, tal como lo establece la ley de Boyle-Mariotte. Esto nos conduce directamente a los principios de Arquímedes y Pascal, cuya formulación rigurosa se reproduce a continuación:

Principio de Arquímedes: *Todo cuerpo sumergido total o parcialmente en un fluido, experimenta una fuerza ascendente (que apunta hacia arriba), cuya magnitud es igual al peso del volumen de fluido desalojado por el cuerpo. Esta fuerza se denomina empuje.* Matemáticamente, este principio se expresa de la siguiente forma:

$$F_e = \rho g V$$

En esta expresión, F_e es el empuje, ρ es la densidad del fluido, g es la aceleración de gravedad, y V es el volumen del fluido desalojado.

Principio de Pascal: *Un cambio en la presión aplicada a un fluido, se transmite sin disminuir a cada punto del fluido y a las paredes del recipiente que lo contiene. Vale decir, dicho cambio es el mismo en cualquier punto del fluido.*

Indicaciones para el/la profesor/profesora: Esta experiencia puede realizarse en grupos, o bien en forma demostrativa por parte del docente. Cualquiera sea la modalidad empleada para desarrollar la actividad, es importante señalar que las preguntas anteriores suelen ser difíciles de responder para los estudiantes, de modo que se sugiere la guía y orientación permanente del profesor. En particular, se sugiere hacer notar a los estudiantes que deben considerar el tubo de ensayo junto al agua que contiene dentro, como si fueran una unidad separada del resto del agua. Así, adquiere sentido afirmar, por ejemplo, que cuando entra agua al tubo de ensayo, éste aumenta su peso y por lo tanto desciende. Tal como sucedió en las actividades anteriores, también se sugiere socializar las ideas, aprovechando esta instancia para reforzar las nociones correctas, corregir los posibles errores, y para promover la discusión, la argumentación y la explicación de los fenómenos en estudio.

5.3.3 Sistematización

Objetivo: Se espera que los estudiantes efectúen un trabajo de sistematización y elaboración personal, de los conocimientos adquiridos en las etapas anteriores. Para ello, deberán ser capaces de identificar los conceptos y leyes físicas que se requieren para abordar y resolver diversos ejercicios, empleando los instrumentos formales de la hidrostática que resulten pertinentes en cada caso, interpretando adecuadamente sus conclusiones, y asignando a cada resultado las unidades físicas que corresponda.

Actividades: Las actividades que se presentan a continuación, demandan de parte de los estudiantes la integración de los contenidos estudiados antes, para lo cual deberán resolver diversos problemas que exigen un adecuado uso de las leyes y conceptos de la hidrostática, de modo que deberán moverse de manera coordinada entre el plano instrumental, el significativo y el relacional.

Indicaciones para el/la profesor/profesora: Para las siguientes actividades se espera que los estudiantes trabajen en forma individual. Sin embargo, luego de un tiempo prudente, cuando la mayoría o la totalidad de los alumnos/as hayan llegado a un resultado, es conveniente discutir las soluciones a los problemas en plenario, para promover la discusión, la argumentación y la explicación de los problemas abordados.

ACTIVIDAD 7
El Titanic

Lee atentamente el siguiente texto, y luego responde las preguntas que se formulan.

Llegar hasta los restos del Titanic, el famoso trasatlántico que luego de chocar contra un iceberg se hundió el 15 de abril de 1912, fue toda una proeza científica y tecnológica. Primero que nada, resultaba sumamente complejo localizar el lugar donde se encontraba sumergido, y para ello fue necesario hacer uso de avanzada tecnología que en la época del Titanic no estaba disponible. Sin embargo, una vez que el Titanic fue localizado, hacer llegar una expedición hasta el sitio donde se encontraba, también fue una tarea en extremo difícil. En la primera expedición exitosa que logró llegar hasta el trasatlántico, se usó equipo de sonar, magnetómetros y un sistema de video submarino llamado Argo, que en el año 1985 permitió localizar los restos del Titanic, que se encontraban a una profundidad de 3.784m.

1) Calcula la presión en el lugar donde se encuentran los restos del Titanic. Supón que la densidad del agua es de 1.000 kg/m^3.

2) Intenta explicar las razones por las cuales resultaba difícil enviar una expedición hasta las profundidades donde se encontraba el trasatlántico, una vez que había sido localizado.

ACTIVIDAD 8
Una Sorpresa Titánica

Un iceberg que flota en el océano, es muy peligroso porque gran parte del hielo está bajo la superficie. Este hielo escondido, puede dañar un barco que todavía está a una distancia considerable del hielo visible, tal como sucedió con el Titanic.

1) Se sabe que la densidad de un iceberg es del orden de 917 kg/m^3. Calcula el peso del iceberg en función de su volumen V_i.

2) Determina la fuerza de empuje sobre el iceberg en función del volumen *V* de éste que se encuentra sumergido. La densidad del agua de mar es del orden de 1.030 *kg/m*^{3}.

3) Sabiendo que un objeto flota en equilibrio si su peso es igual a la fuerza de empuje que actúa sobre él, calcula la fracción o porcentaje del iceberg que yace bajo el nivel de agua. ¿Cómo relacionas este resultado con el hundimiento del Titanic?

ACTIVIDAD 9
El principio de Pascal y las Prensas Hidráulicas

Empleando la información que aparece en la figura 4, calcula la magnitud F de la fuerza que debe actuar sobre en el pistón A para equilibrar la fuerza que actúa en el pistón B, si las áreas de los pistones son tales que la del pistón B es 100 veces mayor que la del A. ¿Qué función puede cumplir el dispositivo de la figura? ¿Conoces otros ejemplos de dispositivos similares cuyo funcionamiento se base en el principio de Pascal? Enumera todos los dispositivos que conozcas.

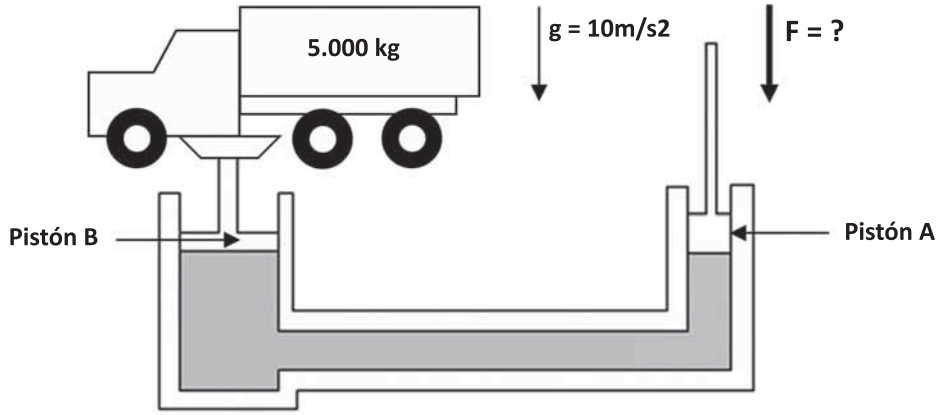


Figura 4. Esquema de la actividad.

5.3.4 Aplicación

Objetivo: En esta etapa se busca que los estudiantes consigan un aprendizaje significativo, ofreciéndoles la oportunidad de que apliquen sus nuevos conocimientos a situaciones distintas, pero al mismo tiempo cercanas a su propia experiencia, para lo cual deberán explicar, justificar y aplicar las leyes y nociones fundamentales de la hidrostática, en situaciones teóricas y experimentales. También se persigue que los alumnos/as, pongan en juego los elementos metacognitivos que demanda todo aprendizaje adecuado.

Actividades: Para comenzar, se propone una actividad de aplicación teórica en un contexto familiar para los estudiantes, donde podrán aplicar los conocimientos adquiridos. Luego, se sugiere una actividad experimental sencilla, orientada a la transferencia de las teorías ya construidas por los estudiantes, a fin de promover el desarrollo de Competencias de Pensamiento Científico.

ACTIVIDAD 10
Una Central Hidroeléctrica

La siguiente imagen presenta una visión esquemática de una central hidroeléctrica de embalse, como algunas que se encuentran en nuestro país, y que permiten abastecer de energía eléctrica a grandes comunidades (Ver figura 5). Si observas con atención la imagen, notarás que existe un punto donde el agua conecta con el generador, que se encuentra a una profundidad equivalente al fondo del embalse. Para responder las preguntas que siguen, puedes imaginar que el agua se encuentra quieta y que la turbina está detenida.

1) En base a las nociones de la hidrostática que ya conoces, intenta explicar la razón por la cual el generador se encuentra a gran profundidad.

2) Si la profundidad del generador sobre el nivel superior del embalse es de 100 m, y el área (sección transversal) del conducto que conecta el agua con el generador es de 1 m^2, determina la fuerza del agua en ese punto.

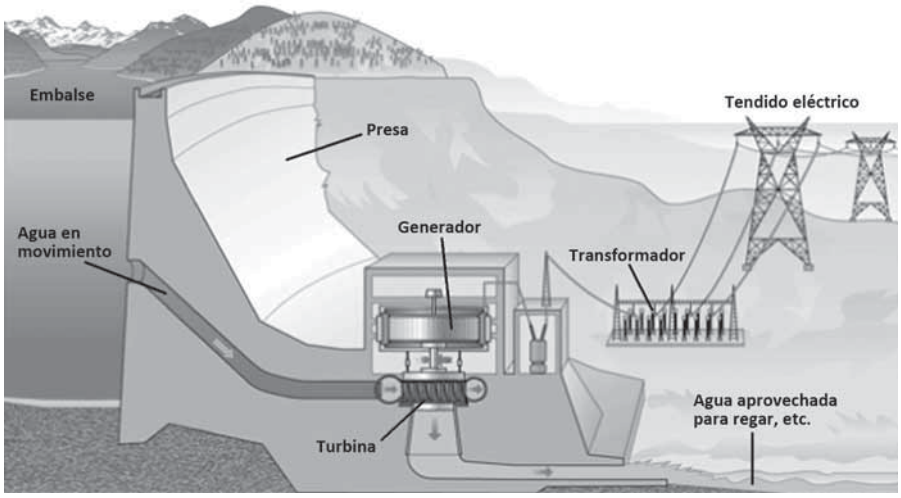


Figura 5. Imagen tomada del sitio web: http://www.renovables-energia.com

Indicaciones para el/la profesor/profesora:

En esta actividad, es importante que los estudiantes no se confundan por el hecho que el agua está en movimiento, cuando una central hidroeléctrica de encuentra en pleno funcionamiento, pues lo importante aquí es que sean capaces de reconocer que a una gran profundidad, la presión del agua puede ser de gran magnitud, lo cual permite generar una enorme fuerza capaz de hacer girar el generador con gran rapidez, para producir energía eléctrica. Tampoco es relevante entrar en los detalles de la transformación de la energía mecánica del agua en energía eléctrica del generador, de modo que la orientación del docente en este sentido es importante para focalizar la atención en lo que resulta relevante para esta unidad.

ACTIVIDAD 11

Experimentando con la Ley de Arquímedes

Para realizar este experimento, necesitas una masa que se sumerja completamente en agua, es decir, que no flote, también requieres un dinamómetro, y un recipiente con agua (Figura 6). Para comenzar, (a) determina el peso de la masa en el aire, y luego (b) determina nuevamente el peso de la masa, pero esta vez estando sumergida en el agua.

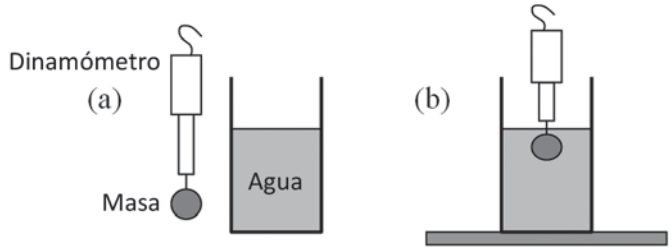


Figura 6. Esquema del experimento.

A partir de las actividades (a) y (b) recién sugeridas, intenta relacionar la teoría que has aprendido con los resultados experimentales que ahora obtienes, formulando hipótesis, y extrayendo las conclusiones que te parezcan pertinentes.

Indicaciones para el/la profesor/profesora:

Este es sin duda un experimento clásico, que puede ser realizado en forma demostrativa o bien en grupos, dependiendo de los recursos de los que disponga el profesor. Sin embargo, si es debidamente realizado, puede ser de gran utilidad para integrar conocimientos, y aplicarlos en una situación experimental de carácter más formal. Tal como ha sido descrito en el párrafo anterior, el experimento está muy poco guiado, pues el objetivo es que los/las alumnos/as tengan libertad para discutir, formular hipótesis, establecer conclusiones, registrar resultados, y aplicar lo aprendido, de modo que la guía del profesor/profesora es importante, y debe ser entregada en función de la autonomía y de los conocimientos que los estudiantes hayan adquirido.

También es muy importante hacerles notar que, en virtud de la ecuación fundamental de la hidrostática, la presión en la parte inferior de la masa es superior a la presión en su parte superior, lo cual permite conectar esta ecuación con el principio de Arquímedes. Naturalmente, se espera que los estudiantes comparen el registro del dinamómetro en aire y en agua, que relacionen esto con el principio de Arquímedes, y que comparen el

modelo teórico con los resultados experimentales, para luego establecer las conclusiones que corresponda.

Como en otros casos, en conveniente que al finalizar la actividad se socialicen las ideas, aprovechando esta instancia para reforzar las nociones correctas, corregir los posibles errores, y para promover la discusión, la argumentación y la explicación de los fenómenos en estudio, de modo que los estudiantes puedan poner en juego los componentes metacognitivos del aprendizaje.

Referencias bibliográficas

Adúriz-Bravo, A. (2008) La naturaleza de la ciencia. En Merino, C., Gómez, M. y Adúriz-Bravo, A., Área y Estrategia de Investigación en la Didáctica de las Ciencias Experimentales (pp. 111 -120). España: Ediciones Universidad Autónoma de Barcelona.

Bell, E. (1985). *Historia de las matemáticas*. Fondo de Cultura Económica, España.

Camacho, J. Quintanilla, M. (2008). Resolución de problemas científicos desde la historia de la ciencia. Retos y desafíos para promover competencias cognitivo-lingüísticas en la química escolar. Ciência & Educação, v. 14, n. 2, p. 197-212.

Couso, D., Izquierdo, M. y Merino, C. (2008). Resolución de Problemas. En Merino, C., Gómez, M. y Adúriz-Bravo, A., Área y Estrategia de Investigación en la Didáctica de las Ciencias Experimentales (pp. 59 -80). España: Ediciones Universidad Autónoma de Barcelona.

Guillén, M. (2000). *Cinco ecuaciones que cambiaron al mundo: el poder y belleza de las matemáticas*. Debate, España.

Strathern, P. (1999). *Arquímedes y la palanca*. Siglo Veintiuno Editores. España.

Labarrere, A. y Quintanilla, M. (2002). La solución de problemas científicos en el aula. Reflexiones desde los planos de análisis y desarrollo. Pensamiento Educativo. Vol 30, 121-137.

Matthews, M. (1989). A role for History and Philosophy in science teaching. Interchange, Vol. 20 N° 2, 3-15.

Quintanilla, M. (2006). Identificación, caracterización y evaluación de competencias científicas, desde una imagen naturalizada de la ciencia. En Quintanilla M y Adúriz-Bravo (ed.), Enseñar Ciencias en el Nuevo Milenio, Retos y Propuesta (pp. 17-28). Santiago: Ediciones PUC.

Capítulo 6

El concepto de triángulo a partir de un cuadro de Wassily Kandinsky

Relaciones entre arte y geometría para el desarrollo de competencias en alumnos en la transición primaria-secundaria

Edelmira Badillo

Contenido

- *Resumen*
- *Justificación teórica de la U.D.*
- *Presentación y Ficha operacional de la U.D.*
- *Desarrollo de la U.D.*
- *Anexos*
- *Referencias bibliográficas*

Resumen

Desde hace unos años, estamos introduciendo una manera innovadora de ver la geometría en la escuela, aprovechando la riqueza y la complejidad que nos proporciona el arte (Badillo y Edo, 2004a, 2004b). A continuación, les presentamos un entorno de aprendizaje y enseñanza del concepto de triángulo, en el ciclo superior de primaria (10-12 años), a partir del estudio del cuadro *Tranquilidad* de Wassily Kandinsky, que nos ha permitido trabajar con igualdad de importancia, los aspectos artísticos y los matemáticos asociados a esta obra de arte.

Proponemos una metodología en la que conjuntamente maestros y alumnos, se involucran en un proceso de reflexión, sobre la funcionalidad de los conceptos geométricos para interpretar y crear "producciones artísticas". Resaltamos al mismo tiempo emociones, sentimientos y valores en el estudio y creación de una composición artística, sin dejar de lado el desarrollo de competencias matemáticas como: (1) el papel de la definición y la demostración matemática, (2) la importancia del uso del lenguaje matemático en el aula, y (3) el uso de diferentes representaciones de los conceptos matemáticos. Todo esto, desde una visión constructivista de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, en la que maestros y alumnos construyen conceptos matemáticos, alternando procedimientos intuitivos, geométricos y algebraicos, que contribuyen a desarrollar un pensamiento geométrico en alumnos de primaria, con el propósito de justificar, interpretar y explorar elementos artísticos y espaciales de su entorno inmediato (Badillo, 2003a; Torres y Juanola, 1998a, 1998b).

La propuesta didáctica que queremos compartir con ustedes se implementó en el aula durante los cursos académicos 2005-06 y 2006-07 en las clases de 5to. y 6to. de primaria (10-12 años), de la *Escuela Salesiana Mare de Déu de la Mercè* de Badalona (Barcelona, España). Las clases estaban conformadas por niños y niñas del primer y segundo curso (10-11 años y 11-12 años respectivamente), del ciclo superior de primaria, dentro de un taller de Arte y Geometría correspondiente a una de las asignaturas complementarias que ofrece la escuela.

6.1 Justificación teórica de la Unidad Didáctica

Los planteamientos teóricos que sustentan este taller, se basan en una visión constructivista del aprendizaje y la enseñanza, en el que la actividad matemática que se genera en el aula, tiene en cuenta diferentes criterios, los cuales han sido señalados de forma recurrente por la investigación psicoeducativa reciente en el ámbito de la educación matemática (Onrubia et al., 2001; Badillo y Edo, 2004a), tales como:

- Contextualizar el aprendizaje de las matemáticas en actividades auténticas y significativas para los alumnos.
- Activar y utilizar, como punto de partida, el conocimiento matemático previo, formal e informal, de los alumnos.
- Orientar el aprendizaje de los alumnos hacia la comprensión y la resolución de problemas, teniendo en cuenta variedad de sistemas de representación y traducción, entre sistemas de representación: gráficos, tablas, ecuaciones, descripciones verbales, etc.
- Vincular el lenguaje formal matemático con su significado referencial o su uso en la cotidianidad.
- Avanzar de manera progresiva hacia niveles más altos de abstracción y generalización: construcción del conocimiento mediante un proceso de abstracciones reflexivas que empiecen en acciones; se interioricen en procesos; y finalmente estos procesos se encapsulen en objetos (Badillo, 2003b).
- Promover, sistemáticamente, la enseñanza en la interacción y la cooperación entre alumnos. Por tanto, resaltamos la importancia del trabajo cooperativo.
- Ofrecer a los alumnos las oportunidades suficientes de "hablar de matemáticas", en el aula.
- Atender los aspectos afectivos y motivacionales implicados en el aprendizaje y dominio de las matemáticas (Onrubia et al., 2001; pp. 498).

Las actividades y contenidos que desarrollaremos a continuación, fueron diseñadas a partir de los aspectos anteriormente enunciados: (1) la naturaleza dual de la matemática (relación del pensamiento intuitivo geométrico y el pensamiento formal matemático), (2) el uso de representaciones, (3) la importancia de la definición matemática y la demostración matemática, y del uso del lenguaje matemático y, (4) la autorregulación de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Igualmente, en relación con el proceso de descripción y análisis de una producción plástica, realizada por los mismos alumnos o por algún artista reconocido, es bueno hacerla siguiendo alguna pauta establecida (Edo y Gómez, 2005). Roser Gómez, especialista en educación visual y plástica, recomienda realizar este análisis en tres fases (Figura 1).

- La fase inicial, se centra en una *Descripción objetiva* de los elementos que se reconocen en la obra (líneas, puntos, manchas, figuras, volúmenes, superficies, texturas, colores, etc.), elementos que forman parte del alfabeto

visual y plástico y que al mismo tiempo, muchos de ellos, son conceptos básicos del currículum matemático de primaria.

- La segunda fase, consiste en una *Evocación creativa* centrada en la mirada subjetiva de cada espectador: ¿Qué podría ser?, ¿qué me sugiere?, ¿qué me recuerda?, ¿qué me provoca?, etc.
- La tercera fase consiste en un *Intento de síntesis* centrado en la pregunta: *¿Qué título le pondrías?* Obviamente se hace antes de haber comunicado cual es el título que le puso el autor.

Al seguir esta pauta, observamos que la primera fase, la más objetiva y más conectada con la matemática, dota al alumno de una serie de "herramientas" derivadas del análisis de la forma, que permiten que la segunda fase, la más subjetiva y creativa, llegue a ser más interesante, rica en matices, y diversa dentro de una misma aula. Siguiendo esta pauta, conseguimos entonces que la primera mirada, geométrica y objetiva, se conecte y convierta en elemento necesario para aumentar la capacidad de interpretar y crear composiciones artísticas, vinculándose al mismo tiempo el desarrollo de sentimientos y las emociones estéticas. En la tercera fase, cuando se imaginan un posible título, aparecen a menudo elementos claves de la descripción objetiva o de la evocación creativa, y por tanto entendemos esta parte de la actividad, como un intento de síntesis de las conversaciones anteriores. Veremos, más adelante, algunos ejemplos de algunas de estas fases.

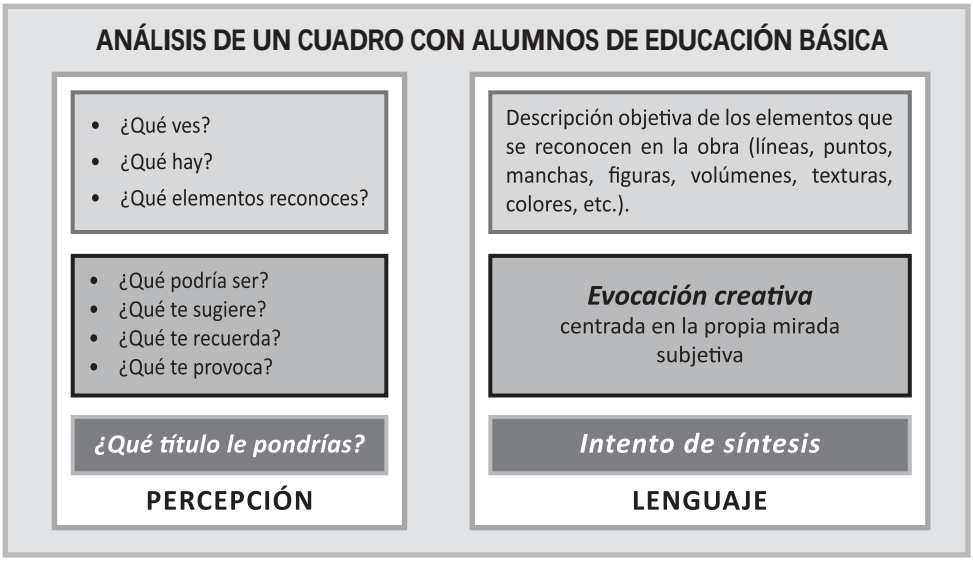


Figura 1. Fases del análisis de una obra plástica.

6.2 Presentación y Ficha operacional de la UD

En el presente taller, hemos propuesto la siguiente secuencia de contenidos, para que los alumnos lleguen a construir un esquema rico y variado del concepto de triángulo:

1. Triángulos.

1.1. Definición de triángulo (conceptual).
1.2. Elementos del triángulo (conceptual).
1.3. Representación, medida y construcción de triángulos con la ayuda del Geoplano (procedimental).
1.4. Clasificación de triángulos: según sus lados y según sus ángulos (conceptual/procedimental).
1.5. Condición necesaria que han de cumplir los lados de un triángulo (conceptual/procedimental).
1.6. Condición necesaria que han de cumplir los ángulos de un triángulo (conceptual/procedimental).
1.7. Resolución de problemas: aplicación y evaluación (procedimental/conceptual).

Para trabajar conjuntamente las relaciones entre arte y geometría, los objetivos generales que nos planteamos al diseñar e implementar el taller de geometría sobre el concepto de triángulo, fueron los siguientes:

- Utilizar obras de arte famosas para la introducción, construcción y evaluación de conceptos geométricos (conceptual).
- Interpretar obras de arte famosas, a partir de la aplicación de los conceptos geométricos desarrollados (conceptual/procedimental).
- Crear y justificar producciones artísticas, como resultado de la aplicación de los conceptos geométricos desarrollados (procedimental/conceptual).
- Conocer y valorar los elementos conceptuales, históricos y biográficos de los autores de las obras seleccionadas (actitudinal).

Con el propósito de alcanzar los objetivos anteriormente presentados, hemos diseñado un conjunto de actividades que hemos clasificado de la siguiente manera:

Tipo de actividad	Número de sesiones[4]
1. De familiarización e introducción al concepto de triángulo.	2
2. De construcción de producciones artísticas.	2
3. De definición del concepto de triángulo, tipos y representación.	6
4. De construcción y representación de triángulos con la ayuda del geoplano.	2
5. De clasificación de los triángulos	2
6. De demostración 1: condición necesaria que han de cumplir los lados de un triángulo.	2
7. De demostración 2: condición necesaria que han de cumplir los ángulos de un triángulo.	2
8. De evaluación y síntesis del taller.	2
Total de sesiones	**20**

6.3 Desarrollo de la Unidad Didáctica

ACTIVIDAD 1
Familiarización e Introducción al Tema

Objetivos:

- Identificar las ideas previas que tienen los niños sobre triángulos, elementos del triángulo y clasificación de triángulos, según sus lados y según sus ángulos, a partir de la pintura *Tranquilidad* de Wassily Kandinsky.
- Introducir a los niños en la interpretación de las obras de arte, emitiendo juicios valorativos, expresando los sentimientos y emociones que les transmite el autor, resaltando los elementos artísticos y las técnicas que se utilizan, a partir de la contemplación de las formas geométricas esbozadas en el cuadro de Kandinsky.

4 Cada sesión corresponde a 60 minutos de clase.

- Motivar a los niños hacia la investigación de los rasgos más importantes de la vida y obra de este pintor, centrándonos en la relación con la Geometría.
- Proponer y justificar a otros pintores y obras concretas, que nos ayuden en el estudio de estos conceptos.

Materiales:

- **Alumnos:** Fotocopia de la portada del *dossier* (figura 2).
- **Maestra/o:** Retroproyector, transparencia de la figura *a* (Pintura de Wassily Kandinsky completa), fotocopia ampliada y plastificada del cuadro de Wassily Kandinsky, papel (colocado en la pizarra), para escribir las ideas de los alumnos, plumones.

Agrupamiento:

Trabajo con toda la clase, en grupos y exposición del profesor.

Desarrollo de la actividad:

Concretamente, aplicando el modelo esbozado en el *esquema 1*, presentamos a los alumnos la imagen del cuadro *Tranquilidad* de Wassily Kandinsky (figura *a*), para introducir y construir los conceptos de triángulo, elementos y tipos, sin hacer referencia al título ni al autor, a partir de las siguientes preguntas:

- Cuando observas esta imagen (ver Figura 2):

a) ¿Qué ves? ¿Qué te sugiere?
b) ¿Qué palabras relacionadas con la Geometría te vienen a la cabeza?
c) ¿Cuáles elementos geométricos identificas?
d) ¿Qué podría ser? ¿Qué te recuerda?
e) ¿Qué título le pondrías?
f) ¿Qué forman las líneas cuando se cortan o se tocan o se interceptan?
g) ¿Identificas *triángulos*? ¿Todos son iguales? ¿De qué tipos identificas?
h) ¿Podrías decir qué es un triángulo con tus propias palabras?

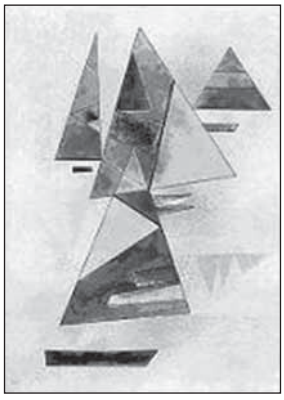


Figura 2. "Tranquilidad".

Posteriormente, después de la puesta en común con toda la clase, y de las respuestas individuales que los alumnos han dado a las anteriores preguntas, nos centramos, por un lado, en el estudio de los rasgos más significativos de la vida y obra de los pintores escogidos, y por otro lado, intentamos hacer emerger las sensaciones que les provoca este cuadro. Finalmente, para motivar la investigación de la obra de Wassily Kandinsky y la de otros pintores que permiten el estudio de estos conceptos geométricos, expusimos de una manera dinámica los rasgos más importantes de este pintor, presentando su fotografía y su firma (Figura 3), y pactamos con los alumnos que en las próximas sesiones, ellos mismos presenten otras pinturas de su obra, y de otros autores que nos ayuden al estudio de estos conceptos geométricos.

Título: *Tranquilidad* (1930).
Autor: Wassikly Kandinsky.
Técnica: Acuarela y tinta china.
Dimensiones: 40 x 33 cm.
Ubicación: Thomas Gallery, Munich (Colección privada).

Figura 3.

ACTIVIDAD 2
Construcción de Producciones Artísticas

Objetivos:

Esta actividad tiene como objetivo promover en los estudiantes procesos de reflexión sobre la importancia que reviste, en la construcción de una producción artística, relacionando arte y geometría, la justificación de los siguientes aspectos:

- El uso práctico de los contenidos geométricos en la construcción de una producción artística.
- Los procedimientos (geométricos y/o algebraicos) utilizados en la construcción de los objetos geométricos (ángulo, triángulo, etc.), que conforman la producción artística.
- Las diferentes técnicas artísticas y materiales que utilizan en la construcción de la producción artística.

- Título del cuadro, nombre del autor, y la descripción de los sentimientos que quiere transmitir con su producción artística.

Materiales:

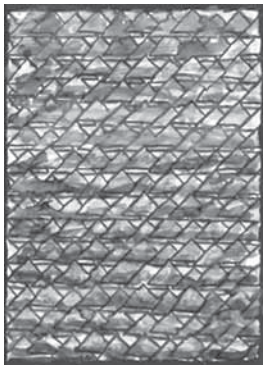
Cualquier tipo de material y técnica plástica son aceptados. Los alumnos deben escogerla y justificar su elección.

Agrupamiento:

Producción individual, descripción y justificación con toda la clase.

Desarrollo de la actividad:

Para ilustrar la forma como trabajaron los niños y niñas este tipo de actividades, siguiendo los aspectos anteriormente señalados en los objetivos, a continuación presentamos tres ejemplos de producciones artísticas realizadas por alumnos (Figura 4a y 4b).



DELGADO, M. (2006). *Laberinto de pirámides.*

Conceptos geométricos: Triángulos y rectángulos.

Técnica: Témpera, rotuladores y cola.

Sentimientos: eso es como un laberinto entre pirámides. Por eso, la intriga es cómo será el final. Los pasillos verdes son los caminos.
La armonía es de los colores verdes de la hierba, los amarillos y los marrones de los tonos de la tierra y el azul del cielo.

ENRI, Y. (2006). *El otoño.*

Conceptos geométricos: Ángulos agudos y rectos, y triángulos.

Técnica: Acuarela, cartulina, cola, escuadra y rotuladores.

Sentimientos: Emoción por los colores del otoño y mucha tranquilidad por sentirlos. Diversión porque los triángulos parecen que fueran muy amigos. Y mucha paz por el comportamiento de los ángulos rectos y agudos que forman los triángulos.

Figura 4a. Ejemplos de producciones artísticas de los alumnos.

MARTÍNEZ, L. (2006). *La puesta del sol.*

Conceptos geométricos: Triángulos, no triángulos y ángulos.

Técnica: Cartulina, ceras, rotuladores y palillos.

Sentimientos: Los sentimientos que transmite este cuadro es de felicidad y armonía, porque cuando uno está triste se va al mar y ve la puesta del sol, y se pone feliz porque es una imagen preciosa de ver. Y he colocado al frente triángulos y otras figuras para que cada quien se centre en ver la parte que quiera.

Figura 4b. Ejemplos de producciones artísticas de los alumnos.

ACTIVIDAD 3
Definición de Triángulo - Construcción

Objetivos:

Construir progresivamente los siguientes conceptos: triángulo, elementos del triángulo y tipos de triángulos según sus lados y según sus ángulos.

Materiales:

- **Alumnos:** Transparencias, rotuladores permanentes, fotocopias de la actividad 3 (anexo 1), libros de texto de matemática de primaria, diccionarios, etc.
- **Maestra/o:** Retroproyector, transparencia de la figura *a*. (Pintura de Kandinsky completa), fotocopia ampliada y plastificada del cuadro de Kandinsky.

Agrupamiento:

Trabajo individual, con toda la clase y en grupos pequeños.

Desarrollo de la Actividad:

En la construcción de la definición del concepto de triángulo, tendremos en cuenta tres fases que esbozamos en la siguiente tabla:

FASE I **Definición individual (ideas previas)**	*FASE II* **Confrontación entre iguales**	*FASE III* **Consenso e introducción de la definición**
1. En tu ficha responde por escrito a las siguientes preguntas: *a. ¿Qué es para ti un triángulo?* *b. ¿Cuáles son los elementos de un triángulo?* *c. ¿Cuántos tipos de triángulos conoces?* *d. ¿Puedes enunciarlos y representarlos?* *e. ¿Qué diferencias significativas observas en los distintos triángulos?*	*1. Comenta con tus compañeros del grupo las definiciones anteriores.* *2. Compárenlas con las que te presentan los libros de texto para ver que le falta, que incorporarías, y propongan una nueva definición para:* *a. Triángulo* *b. Partes y tipos de triángulos* *3. Elaboren una transparencia con el concepto de triángulo que creen correcto (como si editaran un libro de geometría).*	*1. Puesta en común de las definiciones y acuerdo sobre la definición que compartiremos en la clase para:* *a. Triángulo* *b. Partes y tipos de triángulos.* *2. Elaboren individualmente un mapa conceptual del concepto de triángulo.* *3. Puesta en común del mapa conceptual, y elección de los aspectos más relevantes de las definiciones.*

Fase I

Es importante que al inicio, los alumnos, de forma individual, consignen por escrito sus definiciones previas sobre triángulo; esto nos ayudará a ver los aciertos y los posibles errores o dificultades que tienen, con relación a los conceptos por desarrollar. En general, encontramos en las definiciones elementos significativos que, como maestros, se ha de mejorar y tener en cuenta en la gestión que hacemos durante el proceso de construcción, por parte de los estudiantes, del concepto de triángulo. Estos son, entre otros:

1. **Aspectos de la definición** [*diferenciar términos como: punto, recta, semirrecta, segmento, ángulo, etc. Igualmente, detectar errores tal como la idea de que triángulo son dos ángulos agudos juntos (*aunque el tener dos ángulos agudos sea una condición básica de todo triángulo*), etc., quizás influenciada por el abuso en la clase de geometría de ejemplos y prototipos de los triángulos isósceles y equiláteros. Lo anterior se ve reflejado en las representaciones de triángulos que proponen la mayoría de los estudiantes en esta primera fase*].

2. **El uso de representaciones matemáticas** [*Hacer énfasis en el uso de diferentes representaciones para cada una de las partes: lados, vértice, ángulos, etc. Como podemos observar en los ejemplos de los alumnos, hay una gran pobreza en el uso de representaciones del concepto de triángulo. La mayoría de los alumnos hacen referencia a las partes de un triángulo, pero no hace una representación gráfica en la que se especifique cada una de las partes. Igualmente, como ya mencionamos anteriormente, la pobreza de las representaciones refleja el uso de ejemplos y prototipos de los triángulos, que a menudo son trabajados en el aula (isósceles y equilátero)*].

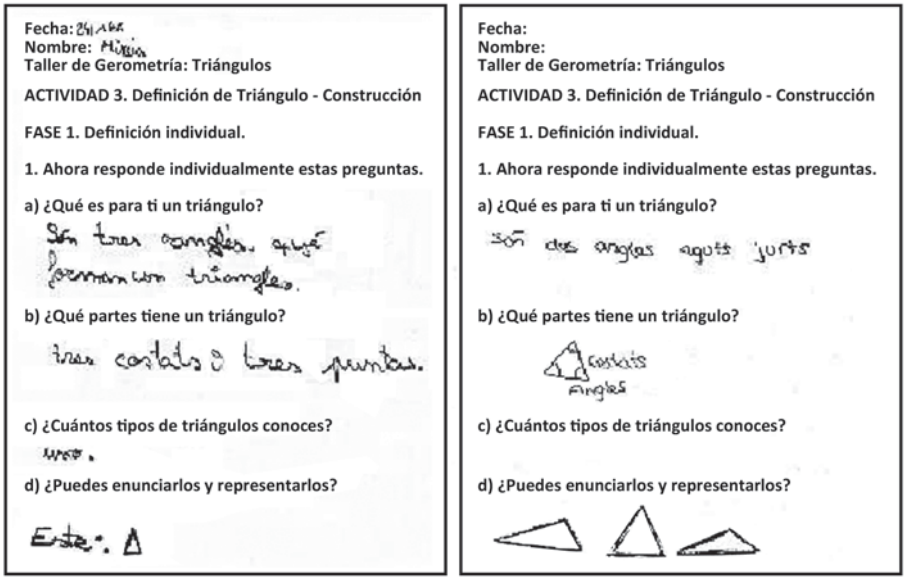


Figura 5. Ejemplos de producciones de los alumnos en la Fase I de la definición del concepto de triángulo.

3. **La necesidad del uso de los símbolos matemáticos** [como una herramienta que *facilita la diferenciación de los diversos elementos, por economía al escribir, etc. Esto se ve reflejado en la ausencia de signos matemáticos, en la mayoría de las representaciones gráficas que hacen los alumnos del triángulo y sus partes, que les ayude a diferenciar los elementos que lo constituyen*].

Fase II

La interacción entre iguales, en la mayoría de los casos, crea un ambiente propicio para el diálogo, el intercambio de ideas en un contexto de igualdad.

La confrontación de ideas y la unificación de criterios que se desprenden en esta fase, ayuda a los estudiantes al respeto por las ideas del compañero, a la negociación entre posturas y a la verificación, mediación y enriquecimiento de las mismas, mediante el buen uso de la información que les proporcionan otros referentes; en este caso, las definiciones de otros libros de texto, el uso de diccionarios, y en general, el manejo de otras fuentes de información. Otro aspecto por resaltar de esta fase, es la motivación por la creatividad que intentamos promover en los estudiantes, a la hora de asumir el rol de "editores de libro" para diseñar la página que incluya la definición del concepto de triángulo. Esto nos permitió observar la influencia que tiene el trabajo en pequeños grupos, pues se dieron evoluciones en las definiciones que inicialmente daban algunos de los estudiantes. Los ejemplos que presentamos a continuación, son las transparencias finales de un grupo de la clase de 5º. La elección de estos ejemplos obedece a las siguientes razones:

1. **Mostrar la evolución en las definiciones iniciales** que evidenciaron los alumnos seleccionados [*más evidente en el caso de Marco*], influenciadas en gran medida por las aportaciones de los compañeros del grupo, y por la interacción con las diferentes fuentes de información con la que contaban los grupos.

2. **Mostrar diferentes aspectos del concepto de triángulo que nos resultan interesantes e importantes de trasladar al aula de clase**: (1) la definición de triángulo como intersección de tres ángulos [*definición de los grupos de Mireia y Marco*], (2) la definición de triángulo como intersección de rectas [*definición de los grupos de Mireia y Marco*], (3) la definición de triángulo como la figura del plano formada por tres puntos no alineados *[definición del grupo de Marco*] y, (4) la definición de triángulo como figura bidimensional formada por tres ángulos, tres lados y tres vértices, que cumplen la condición de que la suma interna de los ángulos que la conforman, es de 180° *[definición de todos los grupos*].

3. **La evolución en el uso de variedad de símbolos y de representaciones que utilizan los diferentes grupos**. Aparecen en las definiciones de todos los grupos el uso de signos matemáticos para referirse a cada uno de los elementos del triángulo, dotando a las definiciones de rigurosidad matemática. Sin embargo, se sigue utilizando mayoritariamente representaciones de triángulos en posiciones prototípicas [*el caso de los grupos de Mireia y Marco*].

4. **La influencia positiva del trabajo en grupo reducido, y el manejo de una gran variedad de fuentes de información en la evolución de las definiciones.** Se puede observar en la transparencia del grupo de Marco, como el trabajo en grupo le ayudó a que introdujera cambios significativos en su definición inicial.

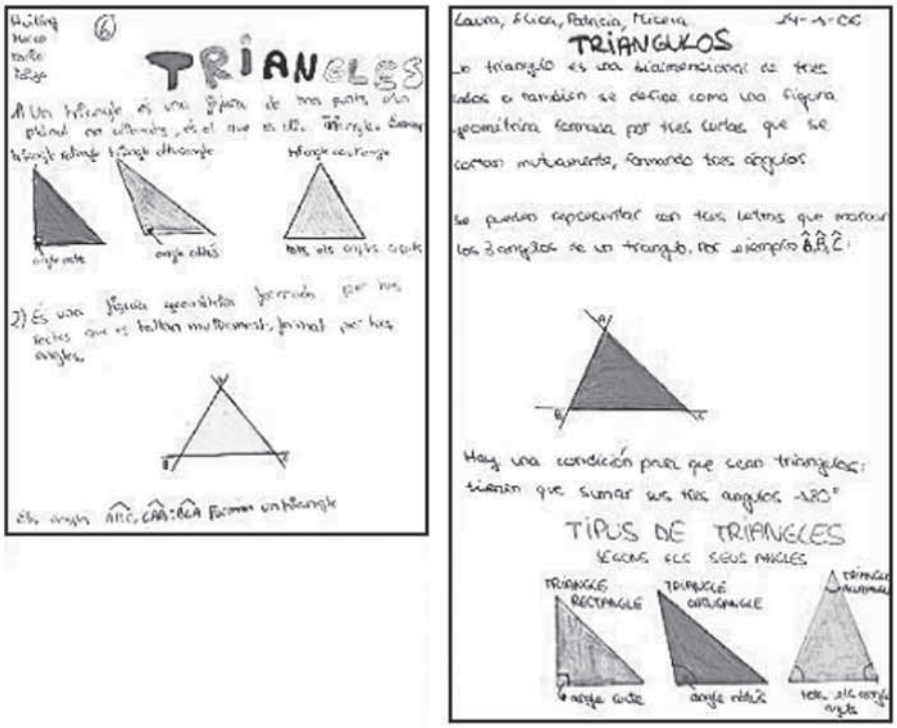


Figura 6. Ejemplos de producciones de los alumnos en la Fase II de la definición del concepto de Triángulo.

FASE III

El objetivo que nos planteamos en esta fase, es consensuar y reconstruir las definiciones propuestas por los alumnos en las fases I y II, teniendo como marco de referencia los diferentes aspectos que enriquezcan el esquema del concepto de triángulo, el uso de variedad de representaciones de este concepto, y la importancia del uso de ejemplos, no ejemplos y contrajemplos del concepto en la resolución de problemas. Les sugerimos para la construcción de los mapas conceptuales los siguientes pasos:

1. Escribe palabras clave que creas que son las más importantes del tema objeto de estudio, con relación a la asignatura que explicas.

2. Trata de organizar las palabras anteriores en jerarquías, y escribe éstas en la hoja de papel donde desarrollarás tu mapa conceptual definitivo.
3. Conecta los pares de conceptos y relaciónalos mediante conectores o palabras enlace, aunque recuerda que también puedes utilizar palabras, por ejemplo verbos, que hagan sencilla la comprensión del mapa.

Después de esta breve introducción sobre los mapas conceptuales, presentamos, a manera de ilustración, un ejemplo de mapa conceptual del concepto de triángulo construido por los niños. Inicialmente, construyeron individualmente el mapa conceptual del concepto triángulo y, posteriormente, en el momento de consensuar el mapa del concepto triángulo que la clase asumía como referente para este concepto, la maestra aprovechó para aclarar dudas sobre la construcción de esta herramienta poderosa. Por tanto, la tarea de construir el mapa conceptual para el concepto de triángulo fue muy ágil, rica y divertida.

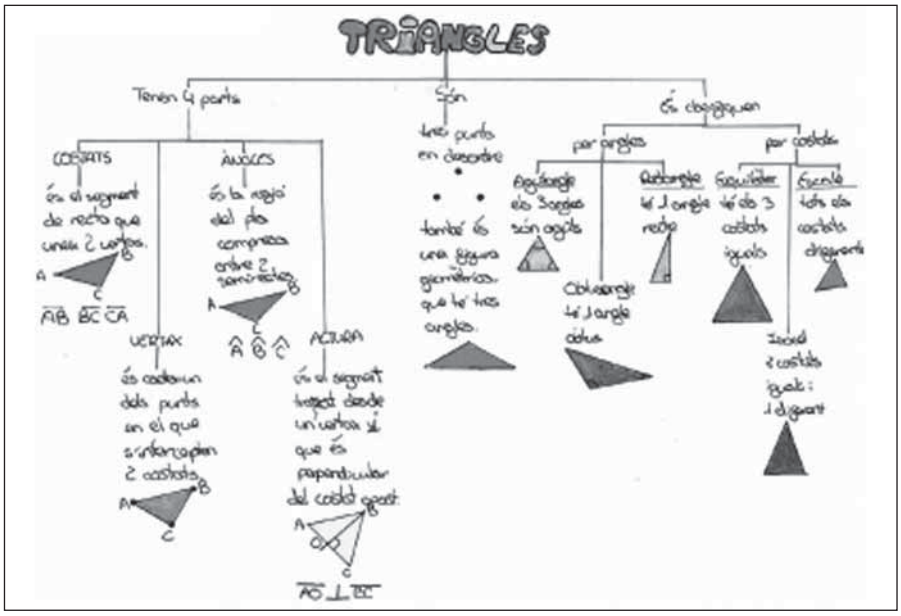


Figura 7. Ejemplos de producciones de los alumnos en la Fase III de la definición del concepto de triángulo [5]

El mapa conceptual del concepto de triángulo construido por Patricia, es un buen ejemplo para ilustrar la complejidad de los objetos matemáticos, que

5 En esta región de España, una de las lenguas vehiculares en la escuela es el catalán, y por ello las producciones estudiantiles están escritas en dicho idioma.

construimos en la primera y segunda fase de la actividad de definición. En esta tercera fase, el objetivo es remarcar sobre los elementos conceptuales, ya que como profesores queremos que los alumnos construyan el concepto de triángulo. Por tanto, queremos resaltar los siguientes aspectos, que los maestros que estén interesados en poner en práctica esta unidad, puedan tener en cuenta a la hora de orientar las discusiones con los alumnos y de consensuar la definición que como grupo hemos construido del concepto en cuestión:

1. **La riqueza y la variedad de los elementos presentes en la definición**, se refleja en el correcto manejo de los constructos matemáticos que utiliza la alumna [*Aparece la definición de triángulo como la figura geométrica formada por la unión de tres puntos no alineados, que si bien es cierto que no utiliza la palabra matemática correcta, demuestra haberse apropiado del significado de este término cuando lo define como tres puntos en desorden, que refleja un nivel de comprensión del concepto matemático. Igualmente, aparece la definición de triángulo como intersección de ángulos*].
2. **El uso de diferentes representaciones del concepto.** Aparecen bien representados algebraica y gráficamente los diferentes elementos que conforman el triángulo, y los diferentes tipos de triángulos los dibuja utilizando representaciones NO prototípicas de los mismos (Figura 8):

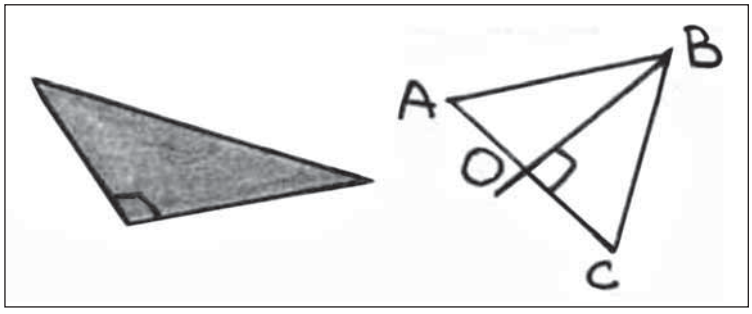


Figura 8.

1. **El uso apropiado del lenguaje matemático**. Se puede observar que las representaciones de los diferentes tipos de triángulos aparecen en posición no prototípicas, y el uso de representaciones algebraicas es la correcta en cada caso. Por ejemplo, en la primera representación para definir la altura de un triángulo usa los signos matemáticos correctos para referirse a vértices, segmentos y perpendicularidad. Sin embargo, en el momento de la discusión dirigida por la maestra y la clase descubrimos

el error de Patricia al interpretar la perpendicularidad del segmento $\overline{OB}$ al lado $\overline{AC}$ como condición necesaria para definir al segmento $\overline{OB}$ como una de las alturas del triángulo ABC ($\overline{OB} \perp \overline{AC}$) (Ver Figura 9).

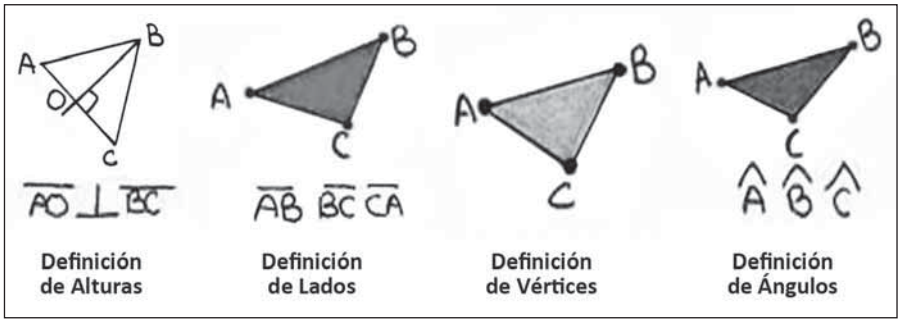


Figura 9.

Otro aspecto a resaltar es el hecho de trazar sólo una de las alturas, con lo cual la maestra insistió con preguntas del tipo: ¿sólo tiene una altura el triángulo ABC? Y dejó abierta la discusión para sesiones posteriores, en las que se trabajaría con más detenimiento el concepto de altura. Finalmente, queremos remarcar la importancia de esta tercera fase del proceso de definir el concepto de triángulo, porque nos resulta rica y provechosa, en el sentido de que el intercambio en grupo grande de los diferentes mapas de los alumnos y la gestión de la maestra, puede ayudar a incorporar en los esquemas de los alumnos, aspectos de la definición del concepto que no han quedado suficientemente "claros". Como resultado de todo el proceso de definición, llegamos a consensuar el mapa conceptual del concepto de triángulo que orientaría las reflexiones, y la actividad matemática que se generaría en la clase.

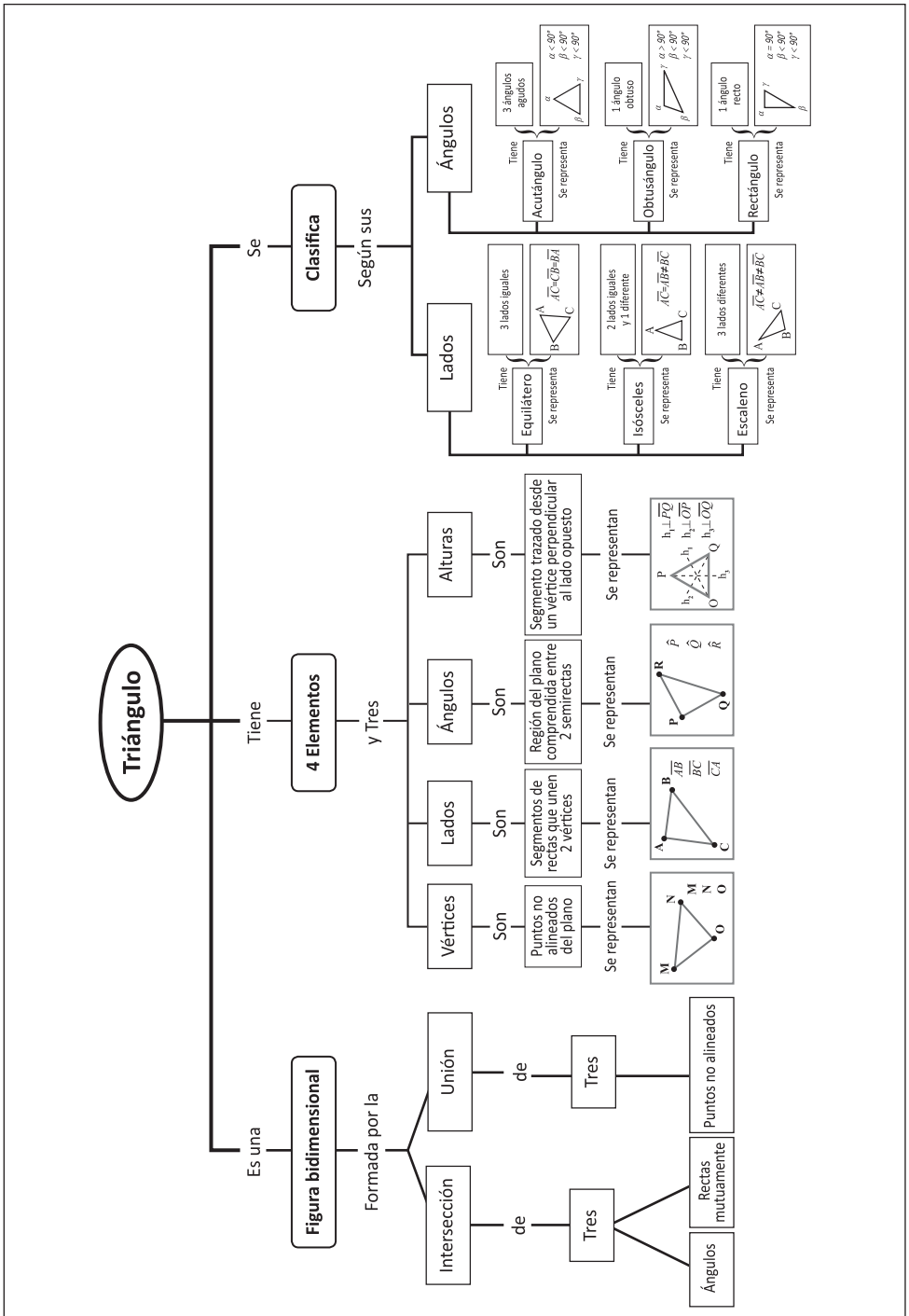


Figura 10. Mapa del concepto de triángulo consensuado por la clase y por la maestra.

ACTIVIDAD 4
Construcción y Representación de Triángulos con la Ayuda del Geoplano

Objetivos:

Esta actividad tiene como objetivo promover en los estudiantes procesos de reflexión sobre la importancia que tiene en la construcción y representación de los diferentes tipos de triángulos, los siguientes aspectos:

1. El sistema de medida de referencia, como el uso de diferentes instrumentos de medición.
2. El valor de la exactitud y la aproximación en los diferentes procesos de medición de magnitudes matemáticas.
3. El conocimiento y la función de los diferentes elementos que conforman el concepto de triángulo: vértice, lados (*significado de semirrecta, recta, segmento*), ángulos, alturas, etc.
4. La riqueza y variedad de representaciones de los diferentes tipos de triángulos (*no caer en el uso exclusivo de prototipos*).
5. El uso de ejemplos, no ejemplos y contraejemplos que promuevan la argumentación y la contraargumentación en la resolución de problemas.
6. El conocimiento y manejo de una nueva herramienta didáctica: el geoplano, la cual facilita la construcción de las representaciones de los diferentes triángulos, centrándonos más en la comprensión de los conceptos que en la construcción compleja con regla y compás de la representación de triángulos en el papel.

Materiales:

- **Alumnos:** Transportador (uno o más), regla y escuadras; Geoplanos: isométrico y cuadricular, fotocopia de la actividad 4 (que incluye dos tramas en papel del Geoplano isométrico y cuadricular), y rotuladores.
- **Maestra:** Retroproyector, transparencias (Anexo IV), plumones.

Agrupamiento:

Trabajo individual, con toda la clase y en grupos pequeños.

Desarrollo de la Actividad:

En esta actividad utilizamos dos tipos de Geoplano: (1) Geoplano de trama **isométrica**, que facilita la representación de polígonos regulares. En este caso concreto, la representación del triángulo equilátero, eliminando los posibles

errores y obstáculos que puedan tener los alumnos con la diagonal en el geoplano de trama cuadricular, ya que la trama isométrica está conformada por triángulos equiláteros cuya medida de los lados es de una unidad de longitud; y, (2) Geoplano de trama **cuadricular,** que permite la construcción de todos los tipos de triángulos, pero que tiene la dificultad añadida de la interpretación de la diagonal de los cuadrados que la componen. En su mayoría, los alumnos tienden a cometer el error de considerarla como una unidad de longitud IGUAL al valor de los lados del cuadrado que la componen; lo cual permite emerger errores conceptuales y de medición (ya que si el lado del cuadrado mide 1 unidad de longitud, su diagonal mide aproximadamente, por el Teorema de Pitágoras, $\sqrt{2} = 1{,}414...$).

Sin embargo, consideramos que previamente al desarrollo de las situaciones que se proponen en la actividad 4, el alumno debe explorar y descubrir los aspectos anteriormente descritos, y en el caso de que surjan estos errores, el maestro debe reorientar la discusión y llevar al alumno a que reflexione sobre las ventajas y desventajas que tiene el uso de los diferentes geoplanos, y las tramas en papel que se les proporcionan. En este sentido, es conveniente que sean los mismos alumnos, con criterios bien definidos y argumentados, los que justifiquen el uso de uno u otro geoplano en la representación de los diferentes tipos de triángulos.

Posteriormente, proponemos la resolución de una serie de mediciones de ángulos, teniendo en cuenta diferentes triángulos que previamente han construido con la ayuda del geoplano, en las que se tratan con igualdad de importancia los siguientes aspectos:

1. **Desarrollo del pensamiento conjetural**, con el propósito de que los estudiantes, usen las definiciones de los diferentes tipos de ángulos, en la *medición aproximada* de los diferentes ángulos que conforman los triángulos representados gráficamente en el geoplano, previo a la comprobación con el transportador y regla.
2. **Introducir el procedimiento geométrico**, que consiste en la utilización del transportador como instrumento que permite una medición "exacta" de los ángulos, y de la regla para medir los lados que conforman los diferentes tipos de triángulo, a partir de su representación gráfica en el geoplano.
3. **Construcción y reproducción gráfica de triángulos en el plano mediante procedimientos geométricos**, a partir de las representaciones construidas en el Geoplano, y el posterior paso al plano en la trama (cuadricular o isométrica), proporcionada en la actividad 4.

ACTIVIDAD 5
Clasificación de los Triángulos: Según sus Lados y Según sus Ángulos.

Objetivos:

- Justificar las relaciones y condiciones que han de cumplir los triángulos para clasificarlos simultáneamente, según sus lados y según sus ángulos.
- Promover progresivamente e individualmente a los alumnos a hacer conjeturas sobre los objetos geométricos, y demostrar dichos argumentos con diferentes tipos de procedimientos: geométrico, algebraico, etc.
- Promover el uso de diferentes procedimientos (intuitivo, gráfico o geométrico y algebraico), para abordar la solución de situaciones que involucren triángulos, mediante el uso de diferentes sistemas de representaciones de los conceptos geométricos utilizados.

Materiales:

- **Alumnos:** Transportador (uno o más), regla y escuadras; Geoplanos: isométrico y cuadricular; tramas en papel: isométrica y cuadricular; papel y lápiz; plumones, esquema conceptual del concepto de triángulo consensuado por la clase; libros de matemática, diccionarios; ficha del dossier de la actividad 5 (Anexo 2).

Agrupamiento:

Trabajo en grupos pequeños y con toda la clase.

Desarrollo de la Actividad:

Como ya mencionamos en el apartado de actividades de definición, el razonamiento matemático y la demostración matemática, proporcionan a los alumnos formas poderosas para desarrollar y comprender conocimientos. Esta actividad la valoramos muy positivamente, por la riqueza del entorno de discusión e intercambio que se genera en el seno de los pequeños grupos, y la gran variedad de preguntas y argumentaciones que emergieron en la puesta en común en el grupo grande (Figura 11).

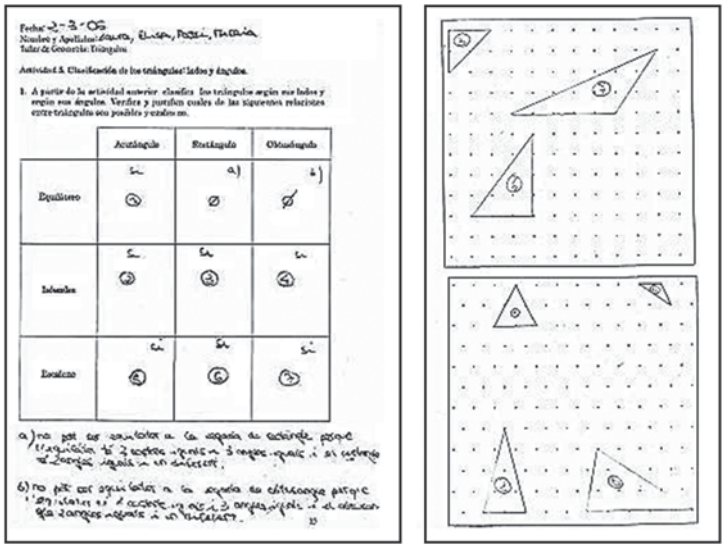


Figura 11.

La consigna inicial que dimos a los estudiantes para la resolución de esta situación, era la de llenar la tabla (anexo 2), con tres opciones de respuesta: (1) Si, (2) No = Ø y, (3) Tenemos dudas. Pero insistimos que para cada respuesta, tendrían que argumentarlas y demostrarlas usando cualquiera de los tipos de procedimientos trabajados en el aula: gráfico, algebraico, numérico y/o verbal. Recordamos que los alumnos contaban con los siguientes materiales para abordar la resolución de la situación: geoplanos isométrico y cuadricular, tramas cuadriculares e isométricas, regla, escuadra, transportador, el esquema conceptual de triángulo consensuado por todo el grupo (ver anexo IV), libros de matemáticas, diccionarios, lápiz y papel.

En las respuestas y argumentaciones dadas por el grupo 1: Laura, Elisa, Patricia y Mireia, observamos que el procedimiento que más usan para demostrar las relaciones posibles, es el gráfico, y para argumentar las relaciones imposibles, el verbal. Destacamos que este grupo eligió con criterios matemáticos muy bien definidos, la opción de representar los triángulos en la trama isométrica o cuadricular que más se ajustaba al argumento matemático que lo respaldaba.

1. **Relación Equilátero-Acutángulo**: la respuesta que dieron a esta relación, es que **sí es posible** y lo demostraron **correctamente** con la siguiente representación gráfica:

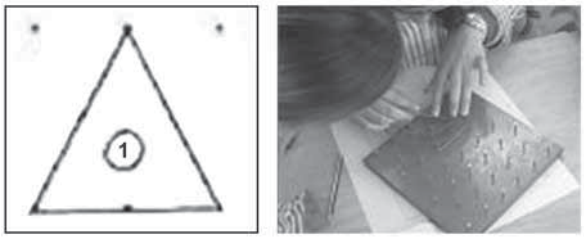


Figura 12.

Resaltamos que este grupo ya tiene interiorizado el concepto de ángulo agudo, y la definición de cada uno de los tipos de triángulos, ya que no acompaña la representación gráfica de ningún otro tipo de representación (numérica, algebraica, etc.), pues considera que el geoplano y la trama isométrica tienen en sí mismos, los argumentos suficientes y necesarios de demostración. Sin embargo, a la hora de comprobar los ángulos, sí que usaban el transportador como herramienta de demostración matemática.

2. **Relación Equilátero-Rectángulo:** la respuesta que dieron a esta relación es que **no es posible,** y lo demostraron **correctamente** con la siguiente argumentación verbal:

> a) No puede ser equilátero a la vez que rectángulo porque el equilátero tiene 3 lados iguales y 3 ángulos iguales y el rectángulo 2 ángulos iguales y 1 diferente.

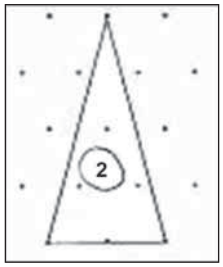
En esta respuesta se argumenta correctamente, la definición de triángulo equilátero haciendo referencia tanto a sus lados como a sus ángulos: son iguales, en cambio la definición de triángulo rectángulo, digamos que es aceptable, pero no del todo correcta y generalizable a todos los casos de triángulos rectángulos, ya que no es verdad que todos los triángulos rectángulos tengan dos ángulos iguales y uno diferente (sería el caso único del tipo al que se refieren: 45º, 45º y 90º).

3. **Relación Equilátero-obtusángulo:** esta respuesta la proporcionábamos nosotros en la tabla como **no posible** y ellas tenían que argumentarla.

> b) No puede ser equilátero a la vez que obtusángulo porque el equilátero tiene 3 lados iguales y 3 ángulos iguales y el obtusángulo 2 ángulos iguales y 1 diferente.

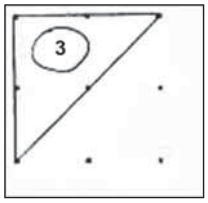
Al igual que en la respuesta anterior, podemos considerarla aceptable pero no correcta desde las matemáticas, porque no es cierto que todos los triángulos obtusángulos tengan dos ángulos iguales y uno diferente, sino que tienen siempre un ángulo obtuso y es imposible que uno equilátero tenga tres ángulos obtusos porque deberían ser todos iguales. Sin embargo, al ver la respuesta que daban a las otras posibles relaciones del triángulo obtusángulo, llegamos a la conclusión de que lo que intentaban decir, es que en los triángulos obtusángulos siempre hay un ángulo obtuso que mide más de 90°, y los otros dos nunca pueden medir igual que él, porque si no, no sería un triángulo. Por tanto, es coherente que su argumento sea semejante al argumento que dieron de la relación anterior (equilátero-rectángulo)

4. **Relación Isósceles-Acutángulo**: la respuesta que dieron a esta relación, es que **sí es posible** y lo demostraron **correctamente** con la siguiente representación gráfica:



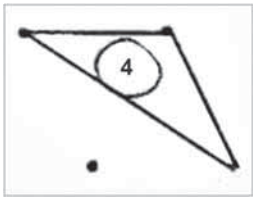
Al igual que en la primera relación, su argumentación la respaldan correctamente en la representación gráfica construida con la ayuda del geoplano, y el subsiguiente paso a la trama isométrica. Resaltamos que la representación gráfica que hacen para argumentar la relación, es correcta porque el triángulo tiene dos lados iguales y uno diferente (definición de triángulo isósceles), y los tres ángulos son agudos (definición de triángulo acutángulo)

5. **Relación Isósceles-Rectángulo:** la respuesta que dieron a esta relación es que **sí es posible,** y lo demostraron **correctamente** con la siguiente representación gráfica:



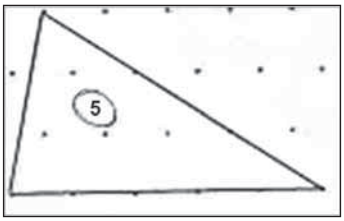
Al igual que en la primera y cuarta relación, su argumentación la respaldan correctamente en la representación gráfica construida con la ayuda del geoplano, y el subsiguiente paso a la trama cuadricular, que facilita la construcción del ángulo recto. Resaltamos que la representación gráfica que hacen para argumentar la relación es correcta, porque el triángulo tiene dos lados iguales y uno diferente (definición de triángulo isósceles), y uno de los ángulos es recto (definición de triángulo rectángulo).

6. **Relación Isósceles-Obtusángulo:** la respuesta que dieron a esta relación es que **sí es posible,** y lo demostraron **correctamente** con la siguiente representación gráfica:



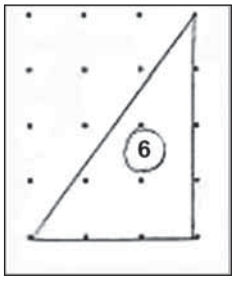
Al igual que en la primera, cuarta y quinta relación, su argumentación la respaldan correctamente en la representación gráfica construida con la ayuda del geoplano, y el subsiguiente paso a la trama isométrica. Resaltamos que la representación gráfica que hacen para argumentar la relación es correcta, porque el triángulo tiene dos lados iguales y uno diferente (definición de triángulo isósceles), y uno de los ángulos es obtuso (definición de triángulo obtusángulo)

7. **Relación Escaleno-Acutángulo:** la respuesta que dieron a esta relación es que **sí es posible,** y lo demostraron **correctamente** con la siguiente representación gráfica:



Al igual que en la primera, cuarta, quinta y sexta relación, su argumentación la respaldan correctamente en la representación gráfica construida con la ayuda del geoplano, y el subsiguiente paso a la trama isométrica. Resaltamos que la representación gráfica que hacen para argumentar la relación es correcta, porque el triángulo tiene todos sus lados diferentes (definición de triángulo escaleno), y los tres ángulos son agudos (definición de triángulo acutángulo).

8. **Relación Escaleno-Rectángulo:** la respuesta que dieron a esta relación es que **sí es posible,** y lo demostraron **correctamente** con la siguiente representación gráfica:



Al igual que en la primera, cuarta, quinta, sexta y séptima relación, su argumentación la respaldan correctamente en la representación gráfica construida con la ayuda del geoplano y el subsiguiente paso a la trama cuadricular, que facilita la construcción del ángulo recto. Resaltamos que la representación gráfica que hacen para argumentar la relación es correcta, porque el triángulo tiene todos sus lados diferentes (definición de triángulo escaleno), y uno de sus ángulos es recto (definición de triángulo rectángulo).

9. **Relación Escaleno-Obtusángulo:** la respuesta que dieron a esta relación es que **sí es posible,** y lo demostraron **correctamente** con la siguiente representación gráfica:

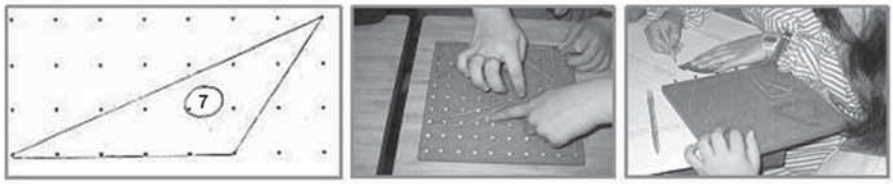


Figura 13.

Al igual que en la primera, cuarta, quinta, sexta, séptima y octava relación, su argumentación la respaldan correctamente en la representación gráfica construida con la ayuda del geoplano, y el subsiguiente paso a la trama cuadricular. Resaltamos que la representación gráfica que hacen para argumentar la relación es correcta, porque el triángulo tiene todos sus lados diferentes (definición de triángulo escaleno), y uno de sus ángulos es obtuso (definición de triángulo obtusángulo).

Con respecto a la segunda parte de esta actividad 5, centrada en el estudio de las alturas de un triángulo, más que hacer un análisis exhaustivo de la actividad matemática de los niños que participaron en esta experiencia, queremos dar unas pistas y fundamentación matemática y didáctica, para que los maestros que estén interesados en profundizar y poner en práctica el desarrollo de esta actividad tengan un referente para gestionar la dificultad que implica la comprensión de estos conceptos tan complejos en este nivel de escolaridad. De hecho, nosotros implementamos en la clase de quinto la segunda parte de la actividad, y los resultados sobre el trazado de las alturas de un triángulo, sólo fueron positivos para un grupo muy reducido de niños de la clase.

Creemos conveniente resaltar, que las investigaciones en didáctica de las matemáticas, han arrojado muchos resultados sobre la dificultad que tienen los alumnos de primaria, secundaria, bachillerato e incluso futuros maestros y maestros de primaria, en la comprensión del concepto de altura y el trazado de las alturas de un triángulo (Azcárate, 1997). Esta autora señala que muchos de los errores que tienen los estudiantes, a la hora de definir el concepto de altura, están fuertemente influenciados por las experiencias previas que han tenido, o bien, en la escuela en la clase de geometría o, por influencia de los libros de texto. Partimos del objetivo de esta actividad que era intentar sacar las ideas previas que los alumnos tenían de las alturas de

un triángulo, e ir movilizándolas en lo posible, hacia un esquema más rico y variado de este concepto. En ningún momento nos planteamos que todos los alumnos llegaran a trazar las tres alturas de un triángulo correctamente. Por tanto, las respuestas a la situación 2 las valoramos como positiva, porque sí nos permitió que emergieran en el aula los esquemas que los alumnos de quinto de primaria, tienen sobre el concepto de altura de un triángulo y su trazado. A continuación, presentamos cuatro ejemplos de las producciones de los grupos, y resaltaremos algunos aspectos, para tener en cuenta y evitar, a la hora de diseñar una secuencia didáctica para el aprendizaje de este concepto:

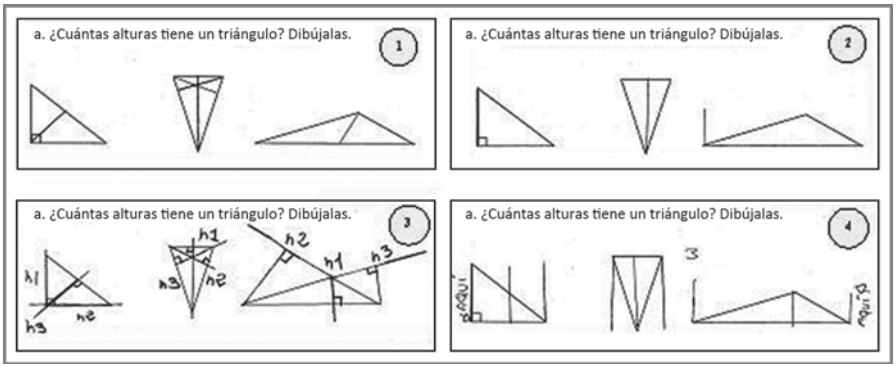


Figura 14.

1. La confusión que muestran los estudiantes de **asociar la altura con la verticalidad** (ejemplos 2 y 4), está fuertemente influenciado por la manera en que, usualmente, se representan los triángulos en la clase de geometría y en los libros de texto, SIEMPRE con "la base" en posición horizontal.

2. El error del **trazado de una sola altura del triángulo** que generalmente se asocia con la vertical (Azcárate, 1997).

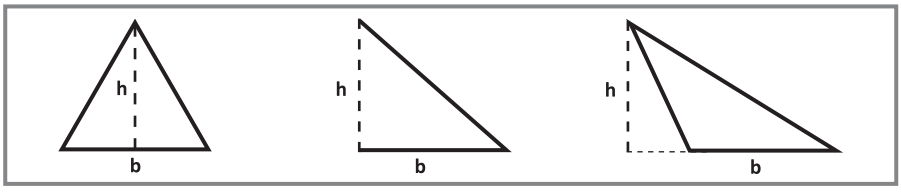


Figura 15. Prototipos de las representaciones de los tipos de triángulo, SIEMPRE con "la base en posición horizontal" y el trazado de "la única altura", que aparecen en los libros de texto y en la clase de geometría.

Dado que inicialmente, ninguno de los grupos trazó correctamente las alturas de un triángulo y que la mayoría consideraba que un triángulo tiene sólo una altura que asociaban directamente con la verticalidad, decidimos centrarnos en el concepto de altura que presentaban diccionarios, libros y documentos que teníamos cercanos, para intentar aclarar dos cosas: (1) ¿qué es eso de la altura de un triángulo? Y, (2) ¿cuántas alturas tiene un triángulo?, dejando de lado el trazado de las mismas.

Después de recordar y volver a consensuar con la clase el concepto de altura, lo definimos de la siguiente manera:

> "La altura de un triángulo es el segmento de recta trazado desde los vértices y que es perpendicular a su lado opuesto".

Inmediatamente, les hicimos a los estudiantes nuevamente la pregunta: ¿cuántas alturas tienen TODOS los triángulo?, pero les advertimos que pensaran bien en cuántos vértices y cuántos lados tienen TODOS los triángulos, que esto les ayudaría a encontrar el número de alturas que tienen TODOS los triángulos, independientemente del tipo que sean. Con este panorama, ya los alumnos volvieron a la ficha, y en su mayoría escribían que el triángulo tiene tres alturas porque tiene tres vértices y 3 lados, pero aún seguía la confusión de asociarla con la verticalidad.

Con el propósito de ayudarles a movilizar las ideas erróneas de asociar:

Altura = vertical y **base = horizontal,**

les propusimos reflexionar **sobre su altura,** y **sobre los convenios universales para medir la altura de los objetos, animales y personas,** teniendo como referente la gravedad; es decir, derechos. La actividad que realizamos por grupos, consistía en escoger un compañero del grupo y medir su altura. Posteriormente, cada grupo explicaría al resto de compañeros: ¿cómo lo hicieron? y ¿cuánto medía?. TODOS los grupos coincidieron que para medir la altura el compañero se colocaba en posición recta (derecho-de pie) y ellos con la ayuda de un metro medían la distancia que había desde la cabeza a los pies. Insistimos en preguntarles si habría otra manera de medir la altura y decían que no. Entonces les preguntamos: ¿ustedes tienen la misma altura cuando están acostados en la cama bien estirados, o cuando están de pie o cuando están en diagonal en la cama, etc.? Inmediatamente, todos dijeron que si, y comenzamos a discutir que la altura de una persona, de un

objeto o de un triángulo, no se tiene que asociar sólo con la VERTICALIDAD, ni las bases de un triángulo con la HORIZONTAL, que los triángulos se pueden representar de diferentes formas e independientemente de la representación, tendrán tres bases y tres alturas.

ACTIVIDAD 6
Condición Necesaria que han de Cumplir los Lados de un Triángulo

Objetivos:

- Que los alumnos lleguen a deducir, demostrar y argumentar las condiciones necesarias que han de cumplir las medida de los lados de un polígono para ser triángulo: "La suma de las medidas de los dos lados más pequeños del triángulo tiene que ser mayor que el valor de la medida del lado más grande".
- Promover progresivamente e individualmente a los alumnos, a hacer conjeturas sobre los objetos geométricos y demostrar dichos argumentos con diferentes tipos de procedimientos: geométrico, algebraico, etc.
- Promover el uso de diferentes procedimientos (intuitivo, gráfico o geométrico y algebraico), para abordar la solución de situaciones que involucren diferentes tipos de triángulos, mediante el uso de diferentes sistemas de representaciones de los conceptos geométricos utilizados.

Materiales:

- **Alumnos:** Tijeras y pegamento; transportador (uno o más); tiras de cartulina de color de 1 cm de ancho; regla y escuadras; lápiz y papel; plumones; Geoplanos: isométrico y cuadricular; tramas en papel: isométrica y cuadricular; ficha del *dossier* de la actividad 6 (anexo 3).

Agrupamiento:

Trabajo en parejas y en grupo grande.

Desarrollo de la Actividad:

A continuación, presentaremos un ejemplo de una secuencia de actividades que buscaba que los alumnos, llegaran a demostrar las condiciones suficientes y necesarias que han de cumplir los lados de un triángulo. Esta actividad parte de conceptos elementales, previamente construidos en el aula por los alumnos como son: los conceptos de segmento (lados), ángulo, triángulo, partes y clasificación de triángulos. Para ilustrar los diferentes

aspectos del concepto de triángulo, que trabajamos en el aula a lo largo de todo el taller, y que consideramos básicos para que un alumno pueda construir un esquema rico y variado de este concepto, a continuación presentamos el estudio de un caso que conforma la actividad matemática, desarrollada por dos alumnas de quinto (Tania y Huiting).

Inicialmente, les presentamos la ficha que diseñamos para que los alumnos en parejas (tal y como estaban sentados en la clase), consiguieran los objetivos propuestos, para posteriormente hacer una puesta en común para aclarar dudas, y para que los alumnos tuvieran un espacio para argumentar sus resultados o para mejorar sus errores. En general, fue una actividad que valoramos como positiva, porque para todos los alumnos fue relativamente fácil llegar a demostrar el teorema de las condiciones necesarias que deben cumplir las medidas de los lados de un triángulo, y para nosotras como maestras, fácil de gestionar la sesión.

Analizando las respuestas que dan Huiting y Tania a las cuestiones propuestas, queremos resaltar diversos aspectos de la actividad matemática realizada en el aula:

1. En lo que respecta a la situación 1, observamos como el material didáctico puede facilitar y hacer emerger procesos de definición en los alumnos (hacer conjeturas, justificarlas y demostrarlas). Así, observamos como después de manipular los triángulos construyéndolos a partir de las condiciones dadas, las alumnas se acercan a una primera formulación de las condiciones necesarias que han de cumplir los lados de un triángulo: *"Sí*, puedo construir triángulos usando las diferentes tiras de cartulina, *cuando la base es más pequeña que el resto. No,* puedo construir triángulos usando las diferentes tiras de cartulina, *cuando la base es más grande que el resto".*

En realidad, han llegado a ver que el lado mayor (la base), tiene que ser más pequeño que la suma de los otros dos lados (el resto). Para demostrar esta afirmación, se basan en las representaciones de los diferentes tipos de triángulos que pueden construir, a partir de las condiciones dadas en la situación propuesta.

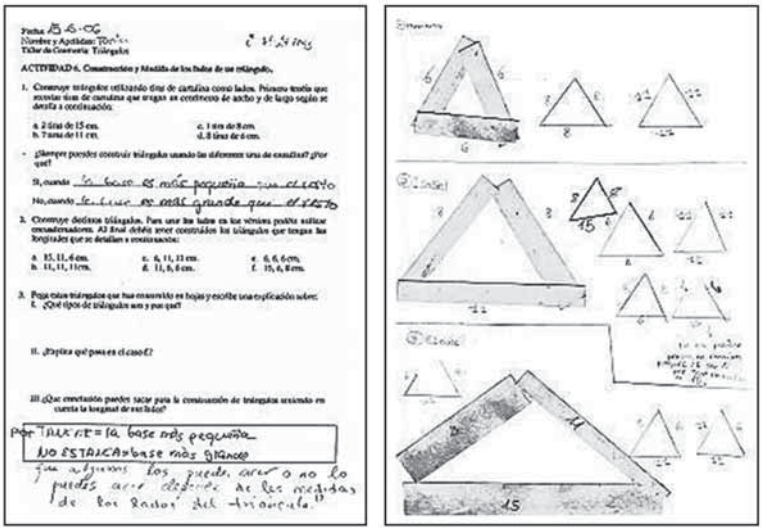
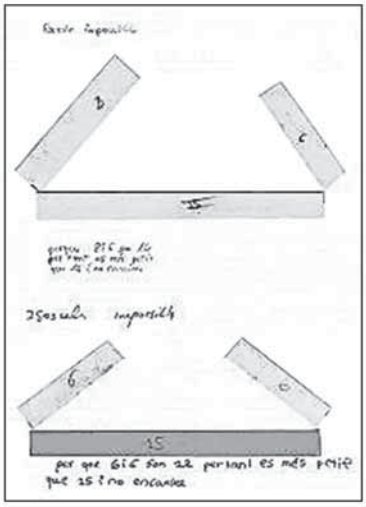
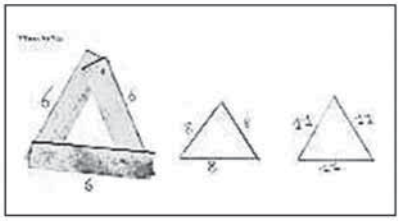


Figura 16.

2. Otro aspecto por resaltar, es la capacidad de las alumnas para demostrar y generalizar la definición que han construido a partir de los casos específicos que les proponía la situación. Por ejemplo, el hecho de que en la segunda situación se les pide que construyan los triángulos con las longitudes dadas, y como ellas generalizan los casos posibles y los no posibles, utilizando las otras longitudes que se les proporcionan, y llegando a hacer representaciones de los casos a "escala", tal y como se ilustra a continuación (ver figura 17):





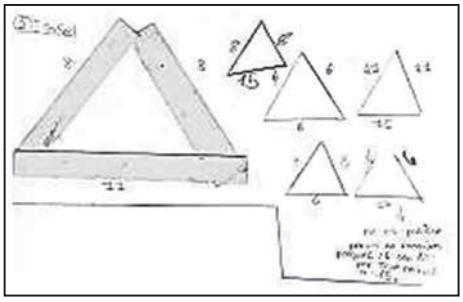
Se les había pedido construir los triángulos cuyos lados tuvieran las longitudes 6, 6, 6 cm. y 11, 11, 11 cm., y ellas hacen a escala el otro caso posible a construir (8, 8, 8 cm.), clasificándolos como los equiláteros posibles.

Figura 17.

Como podemos observar, este tipo de triángulo cumple con la definición inicial, aunque resaltamos como negativo que para demostrarlos, utilicen la representación de los triángulos en posición prototípica (base = horizontal):

"La base es más pequeña que el resto, 6 < 6 + 6 = 12"

3. De igual manera, lo demuestran para los triángulos isósceles, pero resaltamos en esta demostración, el uso de ejemplos y no ejemplos del concepto de triángulo isósceles, y de las condiciones necesarias que han de cumplir los lados de un triángulo. Es decir, no sólo se conforman con representar gráficamente los casos que se les piden, sino que hacen representación a escala de los casos que ellos consideran posibles, independientemente de si se les pide que se construyan en la actividad, y de los casos que consideran imposibles (no ejemplos).



Resaltamos la justificación que dan del caso imposible, del triángulo isósceles 6, 6, 15 cm.:

"No es posible, porque no encaja, porque 6 y 6 son 12, por tanto no llegan a 15".

Es decir, usan un no ejemplo de triángulo isósceles para argumentar y demostrar la definición inicial de que "la base es más pequeña que el resto: 6 + 6 = 12 < 15".

Figura 18.

Siguiendo el mismo tipo de razonamiento, lo demuestran para los triángulos escalenos, no centrándose sólo en el análisis del caso f) 15, 6, 8 cm, sino proporcionando otros casos que ayuden a validar y demostrar su definición inicial, que después generalizan de manera bastante aceptable, afirmando: *"que la construcción de un triángulo depende de las longitudes de los lados, que es posible si la base es más pequeña que el resto y que no es posible si la base es más grande que el resto".*

ACTIVIDAD 7
Condición Necesaria que han de Cumplir los Ángulos de un Triángulo

Objetivos:

- Que los alumnos lleguen a deducir, demostrar y argumentar que *la medida de los ángulos internos de un triángulo suman 180º, independientemente del tipo de triángulo*.
- Promover progresiva e individualmente a los alumnos a hacer conjeturas sobre los objetos geométricos, y demostrar dichos argumentos con diferentes tipos de procedimientos: geométrico, algebraico, etc.
- Promover el uso de diferentes procedimientos (intuitivo, gráfico o geométrico y algebraico), para abordar la solución de situaciones que involucren diferentes tipos de triángulos, mediante el uso de diferentes sistemas de representaciones de los conceptos geométricos utilizados.

Materiales:

- **Alumnos:** Tijeras y pegamento; transportador (uno o más); regla y escuadras; lápiz y papel de diferentes colores; rotuladores; Geoplanos: isométrico y cuadricular; tramas en papel: isométrica y cuadricular; Ficha del *dossier* de la actividad 7 (Anexo 4).

Agrupamiento:

Trabajo individual y con toda la clase.

Desarrollo de la Actividad:

A continuación, presentaremos un ejemplo de una secuencia de actividades que buscaba que los alumnos, llegaran a demostrar las condiciones suficientes y necesarias que ha de cumplir la suma de los ángulos internos de un polígono, para que sea un triángulo. Esta actividad parte de conceptos elementales, previamente construidos en el aula por los alumnos, como son: los conceptos de segmentos, ángulos, triángulos, partes y clasificación de triángulos.

Para ilustrar los diferentes aspectos del concepto de triángulo, que trabajamos en el aula a lo largo de todo el taller, y que consideramos básicos para que un alumno pueda construir un esquema rico y variado de este concepto, a continuación presentamos el estudio de un caso. Inicialmente, les presentamos la ficha que diseñamos para que los alumnos, en forma individual, consiguieran los objetivos propuestos para, posteriormente, hacer

una puesta en común para aclarar dudas, y para que los alumnos tuvieran un espacio para argumentar sus resultados, o para mejorar sus errores. En general fue una actividad que valoramos como positiva, porque para todos los alumnos fue relativamente fácil llegar a demostrar el teorema de la suma interna de los ángulos de un triángulo, y para nosotras, como maestras, fácil de gestionar la sesión.

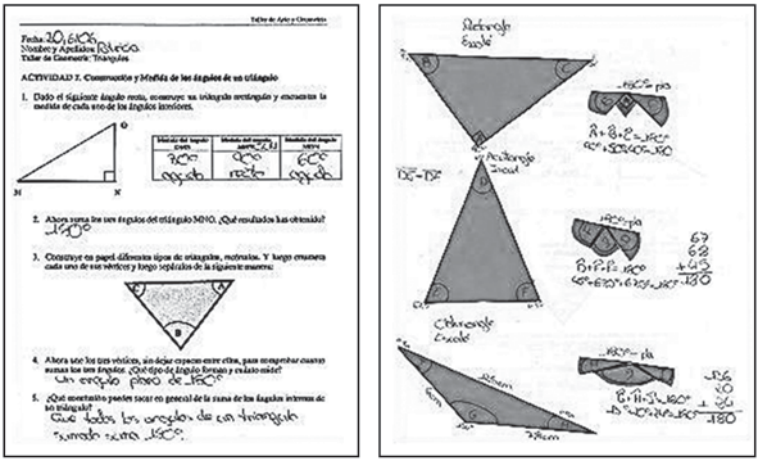


Figura 19. Producciones de Patricia, una alumna de quinto.

Queremos resaltar diversos aspectos de la actividad matemática desarrollada por Patricia, en la que vemos reflejados muchos de los presupuestos teóricos que trabajamos insistentemente en el aula, mediante el diseño de actividades significativas que ayudaran progresivamente a los alumnos a comprenderlos. Resaltamos:

1. El uso de representaciones gráficas no prototípicas de triángulos y ángulos.

2. El uso del lenguaje matemático, asociado a su significado referencial; es decir, representación de ángulos y segmentos haciendo uso de una notación correcta y variada. Por ejemplo: para nombrar los ángulos de los triángulos usa los siguientes signos matemáticos: $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, etc.$ y, para nombrar a los lados de los triángulos: $\overline{DE} = \overline{DF}$.

3. En sus producciones, queda implícita la definición de triángulo como la intersección de tres ángulos, que a la vez formen un ángulo de 180º, que asocia con la definición de ángulo plano.

4. La clasificación simultánea que hace la alumna de los triángulos, según sus lados y según sus ángulos. Este aspecto lo consideramos muy interesante, porque la investigación en didáctica de las matemáticas, nos señala que la mayoría de los alumnos tienden a almacenar la clasificación de los triángulos, en dos cajones independientes. Por ejemplo, la clasificación que hace de los triángulos como: rectángulo y escaleno; acutángulo e isósceles; y, obtusángulo y escaleno, respectivamente (ver Figura 19).

5. La necesidad de demostrar geométricamente, mediante el uso de los instrumentos de validación que utilizamos en el aula: transportador y regla, la clasificación que hace de cada uno de los triángulos. Es decir, midiendo con regla sus lados para verificar la clasificación según sus lados, y midiendo sus ángulos con transportador para verificar la clasificación según sus ángulos.

6. La variedad de procedimientos que utiliza en sus demostraciones: (1) *Gráfico-geométrico* (jugar con el rompecabezas de la representación de los ángulos que forman los triángulos hasta encontrar que *siempre* forman un ángulo conocido como es el plano); (2) *Numérico* (cuando mide los ángulos y hace la suma de los mismos para demostrar que efectivamente, tal y como indica la representación gráfica, suman 180°); (3) *Algebraico* (cuando usa la notación de ángulos y expresa, aunque no tenga conciencia, la suma de los ángulos internos como una ecuación de primer grado con tres incógnitas: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^{o}$; y, (4) *Verbal* (cuando finalmente llega a la generalización de que la suma interna de todos los ángulos de un triángulo es siempre 180º, después del estudio y el análisis particular de los casos que le proporcionamos).

7. Las estrategias de cálculo escrito y mental, que utiliza para superar las dificultades que evidencia con el algoritmo de la suma de decimales, como es el cálculo aproximado de las cantidades por compensación.

ACTIVIDAD 8
Actividad Individual de Evaluación

Objetivos:

- Diagnosticar el nivel de comprensión de los conceptos desarrollados en el taller de triángulos.
- Reforzar y ampliar el uso de los procedimientos geométricos, algebraico, numérico e intuitivo en la resolución de problemas prácticos.
- Generar una actividad matemática en los estudiantes, donde los conceptos geométricos tratados, sirvan como instrumento en el proceso de resolución de situaciones problemas prácticas y significativas.

Materiales:

- **Alumnos:** Imagen del cuadro Tranquilidad de Kandinsky; Mapa conceptual del esquema de triángulo consensuado por la clase; Transportador (uno o más); Geoplanos: isométrico y cuadricular; Regla y escuadra; Rotuladores; Ficha del *dossier* de la actividad 8.

Agrupamiento:

Trabajo individual, evaluación por parejas de alumnos (intercambio de la actividad para ser evaluada por el compañero), tutoría individualizada del maestro y reflexión con toda la clase.

Desarrollo de la Actividad:

Esta actividad, la diseñamos para evaluar algunos aspectos del taller que habíamos trabajado y enfatizado, en el desarrollo de las 7 actividades anteriores. Sin embargo, éste no es el único instrumento de evaluación que usamos para analizar la actividad matemática generada en el aula por los alumnos, sino que toda la observación e información que, como maestros, podemos recoger a lo largo del desarrollo del taller, también se convierten en fuentes de información valiosas que nos permiten tener una idea aproximada de la evolución de los alumnos.

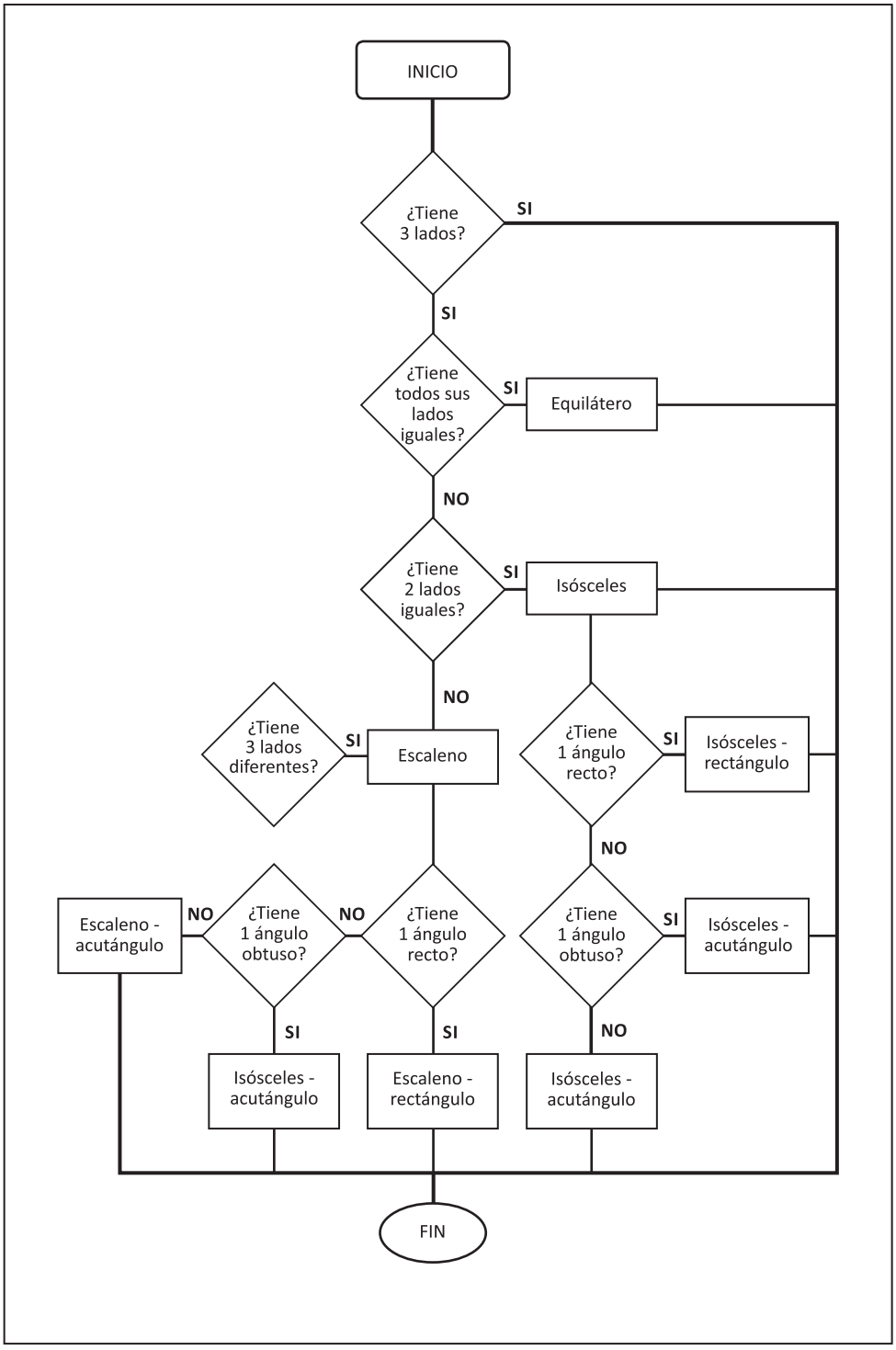
Por tanto, dentro del marco de este taller, la evaluación es considerada formativa, continua e integral. Lo anterior implica centrarnos en la evolución de los aprendizajes de los estudiantes, más que en los resultados puntuales o finales. Además, consideramos que la evaluación es un proceso en el cual los alumnos tendrían que participar activamente. Por tanto, proponemos la reflexión por parte de los maestros, de los siguientes tipos de evaluación que hemos implementado en el aula a lo largo de todo el taller:

- **Auto-evaluación:** revisión continua de las actividades del *dossier*, revisión y mejora continua de sus producciones artísticas.
- **Entre iguales:** valoración de les producciones del compañero, intercambio de material para corregir errores, debate y argumentación de ideas, etc.
- **Negociación de los criterios de evaluación y de los aspectos y problemas por evaluar:** los alumnos participen en la construcción de problemas, preguntas abiertas, y las correspondientes respuestas que se tendrán en cuenta en la evaluación final o de síntesis (la cual forman parte del proceso).
- **Hetero-evaluación:** considerada no estática, ni acabada; los alumnos tienen la oportunidad de revisar, mejorar y proponer alternativas de solución, que reflejen los progresos que van alcanzando.

A continuación, presentamos otro modelo de situaciones que permiten evaluar la evolución conceptual de los estudiantes, mediante el uso de esquemas que permiten organizar la información. Esta actividad es compleja de gestionar, porque los alumnos no están acostumbrados a este tipo de situaciones al ser evaluados. Por tanto, requiere de una motivación y explicación inicial del maestro, que les ayude a comprender y procesar la información que se les proporciona, y lo que se les pide hacer.

Lo rico de esta actividad, es el debate que se genera en el aula delante de las respuestas (bien sean acertadas o erróneas), de los niños y sus posibles argumentaciones. Es una actividad pensada para resolverla individualmente, y posteriormente, se intercambien por parejas para compartir las respuestas del compañero de mesa, evaluarlas, justificarlas y llegar a un acuerdo sobre las posibles correcciones que harán como pareja, para ser presentadas y argumentadas en el debate con toda la clase. Les proporcionamos las respuestas correctas del esquema como guía para la discusión que pueda generarse en el aula.

A continuación se presenta un cuadro que sintetiza las propiedades del triángulo.


INICIO
¿Tiene 3 lados?
SI
SI
¿Tiene todos sus lados iguales?
SI
Equilátero
NO
¿Tiene 2 lados iguales?
SI
Isósceles
NO
¿Tiene 3 lados diferentes?
SI
Escaleno
¿Tiene 1 ángulo recto?
SI
Isósceles - rectángulo
NO
Escaleno - acutángulo
NO
¿Tiene 1 ángulo obtuso?
NO
¿Tiene 1 ángulo recto?
¿Tiene 1 ángulo obtuso?
SI
Isósceles - acutángulo
SI
SI
NO
Isósceles - acutángulo
Escaleno - rectángulo
Isósceles - acutángulo
FIN

6.4 Anexos

Ficha metodológica de la Unidad Didáctica, fotografías, etc.

ANEXO 1

Fecha:

Nombre y Apellidos:

Taller de Geometría: Definición de triángulos

FASE II. Confrontación entre iguales

Sois editores de un libro y tenéis que redactar una página con la definición del concepto de *triángulo* y *tipos de triángulos* que presentareis en una transparencia. **Sugerencia**: partiendo de vuestras definiciones (**FASE I**), podéis incorporar nuevas ideas utilizando otras definiciones de este concepto. Por ejemplo, las siguientes:

Definición 1: Editorial MOLINO

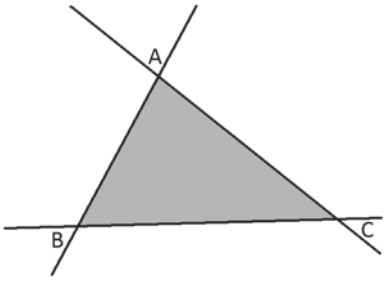
> *Un triángulo es una figura bidimensional de tres lados.*

Definición 2: Diccionario de la Real Academia española.

> m. GEOM. *Figura geométrica formada por tres rectas que se cortan mutuamente, formando tres ángulos.*

Definición 3: http://es.wikipedia.org

> *Siendo A, B y C tres puntos de un plano no alineados, se llama triángulo ABC a la intersección de los ángulos ABC, CAB y BCA.*



ANEXO 2

Fecha:

Nombre y Apellidos:

Taller de Geometría: clasificación de triángulos

ACTIVIDAD 5

Clasificación de los Triángulos: Según sus Lados y sus Ángulos

1. A partir de la actividad anterior, clasifica los triángulos según sus lados y según sus ángulos. Con la ayuda del geoplano y de las tramas isométricas y cuadricular, verifica y justifica cuáles de las siguientes relaciones entre triángulos son posibles y cuáles no.

	Acutángulo	**Rectángulo**	**Obtusángulo**
Equilátero		ϕ	
Isósceles			
Escaleno			

2. Pensemos en las alturas de un triángulo.

   a. ¿Cuántas alturas tiene un triángulo? Dibújalas.

ANEXO 3

Fecha:

Nombre y Apellidos:

Taller de Geometría: demostración matemática 1.

ACTIVIDAD 6
Condición Necesaria que han de Cumplir los Lados de un Triángulo

1. Construye triángulos utilizando tiras de cartulina como lados. Primero tenéis que recortar tiras de cartulina de color que tengan un centímetro de ancho y de largo, según se detalla a continuación:
   a. 3 tiras de 6 cm.
   b. 3 tiras de 10 cm.
   c. 3 tiras de 8 cm.
   d. 1 tira de 15 cm.
   - ¿Siempre puedes construir triángulos usando las diferentes tiras de cartulina? ¿Por qué?

     Sí, cuando . . . . . .
     . . . . . .
     . . . . . .

     No, cuando . . . . . .
     . . . . . .
     . . . . . .
2. Con las tiras de cartulinas de las siguientes longitudes construye, si es posible, distintos tipos triángulos. **Sugerencia**: para unir los lados en los vértices podéis utilizar encuadernadores.
   a. 15, 10, 6 cm.
   b. 10, 10, 10 cm.
   c. 10, 8, 6 cm.
   d. 10, 6, 6 cm.
   e. 6, 6, 6 cm.
   f. 15, 6, 8 cm.

3. Pega estos triángulos que has construido en hojas y escribe una explicación o justificación sobre los siguientes aspectos:

   I. ¿Qué tipos de triángulos son y por qué? **Sugerencia**: especifica simultáneamente el tipo, según sus ángulos y según sus lados.

   II. ¿Explica qué pasa en el caso f.? Puedes modificar alguna condición para que pueda ser un ejemplo de triángulo.

   III. ¿Qué conclusión puedes sacar para la construcción de triángulos, teniendo en cuenta la longitud de sus lados?

ANEXO 4

Fecha:

Nombre y Apellidos:

Taller de Geometría: demostración matemática 1.

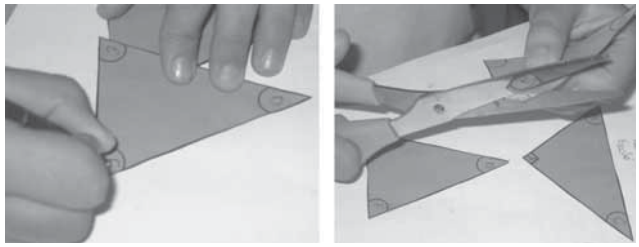
ACTIVIDAD 7
Condición Necesaria que han de Cumplir los Ángulos de un Triángulo

1. Dado el siguiente ángulo recto, construye un triángulo rectángulo y encuentra la medida de cada uno de los ángulos interiores.

Medida del ángulo OMN	Medida del ángulo MNO	Medida del ángulo MON

2. Ahora suma los tres ángulos del triángulo MNO. ¿Qué resultados has obtenido?

3. Construye en papel diferentes tipos de triángulos, recórtalos. Luego enumera cada uno de sus vértices y, finalmente, sepáralos de la siguiente manera:



4. Ahora une los tres vértices, sin dejar espacio entre ellos, para comprobar cuanto suman los tres ángulos. ¿Qué tipo de ángulo forman y cuánto mide?

5. ¿Qué conclusión puedes sacar en general de la suma de los ángulos internos de un triángulo?

Referencias bibliográficas

Azcárate, C. (1997). Si el eje de ordenadas es vertical, ¿qué podemos decir de las alturas de los triángulos? *SUMA, 25, 23-30.*

Badillo, E. (2006). Art i Geometria CS. *27ª. Escola d'Estiu del Vallès Occidental*. *L'educaci, ara*. Documento inédito sin publicar.

Badillo, E. (2003a). La Matemática como herramienta para interpretar y crear Obras de Arte. *Actas de las XI Jornadas sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas (JAEM).*

Badillo, E. (2003b). La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia. *Tesis Doctoral*. Universitat Autònoma de Barcelona.

Badillo, E. y Edo, M. (2007a). Els conceptes de triangle, elements i tipus a partir del quadre *Tranquil·litat* (1930) de Wassily Kandinsky. *Guix.*

Badillo, E. y Edo, M. (2007b). «Taller de arte y geometría en el ciclo superior de primaria II: Triángulos», Desarrollo Curricular. Estrategias e Instrumentos. En: C. Tomás, y M. Casas (coord.). *Educación Primaria. Orientaciones y Recursos (6-12 años).* Barcelona: CISSPRAXIS. CD-Rom.

Badillo, E. y Edo, M. (2007c). «Taller de arte y geometría II: Documentación para el taller», Desarrollo Curricular. Estrategias e Instrumentos. En: C. Tomás, y M. Casas, (coord.). *Educación Primaria. Orientaciones y Recursos (6-12 años).* Barcelona: CISSPRAXIS CD-Rom.

Badillo, E. y Edo, M. (2004a). «Taller de arte y geometría en el ciclo superior de primaria I: Ángulos», Desarrollo Curricular. Estrategias e Instrumentos. En: C. Tomás, y M. Casas (coord.). *Educación Primaria. Orientaciones y Recursos (6-12 años).* Barcelona: CISSPRAXIS. CD-Rom, 28 págs.

Badillo, E. y Edo, M. (2004b). «Taller de arte y geometría I: Documentación para el taller», Desarrollo Curricular. Estrategias e Instrumentos. En: C. Tomás, y M.

Casas, (coord.). *Educación Primaria. Orientaciones y Recursos (6-12 años).* Barcelona: CISSPRAXIS CD-Rom, 35 págs.

Castelnuovo, E. (1981). *La matemática. La Geometría.* Barcelona: KETRES EDITORA S.A.

Edo, M. (2003). Intuir nociones geométricas desarrollando emociones estéticas. Ponencia núcleo temático 3. *Actas de las XI Jornadas sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas (JAEM).*

Edo, M. (2000). Mundo matemático. Formas en el espacio. En: Anton, M. y Moll, C. (Coord.). *Educación infantil. Orientaciones y recursos (0-6 años).* Barcelona: CISSPRAXIS. SA, pp. 301-409.

Edo, M. (1999). "Reflexiones para una propuesta de geometría en el parvulario", en *Suma,* 32, pp. 53-60.

Edo, M. (2005). Matemática y Arte en la Educación Infantil, a partir del cuadro "Bailando por miedo" de Paul Klee. A D. Couso, E. Badillo, A. Adúriz-Bravo, G. Perafán (eds.) *Unidades didácticas en ciencias y matemáticas***.** (pp. 93-126) Bogotá: Magisterio.

Grupo Cero (1996). *MATEMÁTICAS. IV TERCER ciclo. Materiales curriculares para la educación primaria 6-12 años.* Madrid: MEC-EDELVIVES.

NTCM (2000). Principio y Estándares para la Educación Matemática. Granada: S.A.E.M. Thales.

Onrubia, J. *et al.* (1999). La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva psicológica. En: Coll, C., Palacios, J., Marchesi, A. (Comp.). *Desarrollo psicológico y educación 2. Psicología de la educación escolar*. Madrid: Alianza. P. 487-508.

Torres, M., y Juanola, R. (1998a). *Dibujar: mirar y pensar. Consideraciones sobre educación artístic*a. Barcelona: Rosa Sensat.

Torres, M., y Juanola, R. (1998b). *Una manera de enseñar artes plásticas en la escuela. 140 ejercicios para educación infantil y primaria*. Barcelona: Rosa Sensat.

Capítulo 7

Resignificación del Algoritmo para Operar Aditivamente con Fracciones[6]

Pilar Peña, Francisco Rojas

Contenido

- *Resumen*
- *Introducción*
- *El concepto de fracción*
- *Diseño de la unidad didáctica*
- *Valoración de la experiencia*
- *Referencias bibliográficas*

6 Los autores agradecen la colaboración de Silvia Navarro Adriasola en la revisión final de este documento. Sus aportes han sido de gran ayuda para la clarificación de los conceptos clave que se desarrollan en esta unidad.

Resumen

La presente Unidad Didáctica (UD), tiene como objetivo principal el desarrollo de un proceso de resignificación del algoritmo para la suma y resta de fracciones, dando especial énfasis a las razones que justifican cada uno de los pasos que se realizan. Tal como plantean García y Montiel (2007), "buscar la resignificación de un concepto, supone que los estudiantes han tenido ya un acercamiento escolar del mismo" (p. 160), y en este trabajo, al igual que las autoras, buscamos romper con las formas tradicionales de enseñanza del algoritmo aditivo para fracciones. Este proceso se realizará a través de una secuencia de actividades que están sustentadas en emergencia histórica, del concepto de fracción.

En este sentido, esta propuesta de enseñanza-aprendizaje está diseñada considerando los principios básicos de la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986), dentro de los cuales se señala que las actividades de aprendizaje deben ser elaboradas de manera tal, de producir una génesis "artificial" de los conocimientos, en cuanto a replicar la situación histórica-epistemológica que permitió la emergencia del concepto en cuestión. Para que esta génesis suceda, es importante considerar que el conocimiento ha de ser funcional, es decir, que los estudiantes "aprendan haciendo funcionar el saber, o más bien, que el saber aparezca, para el alumno, como un medio de seleccionar, anticipar, ejecutar, y controlar las estrategias que aplica a la resolución del problema planteado por la situación didáctica" (Gálvez, 1994).

7.1 Introducción

Sin duda, y así lo pueden asegurar muchos profesores y profesoras, uno de los conceptos matemáticos que mayor dificultad presenta en el avance de los y las estudiantes en la educación básica, es el de las fracciones. Las diferencias epistemológicas respecto de los números naturales, que es lo que se ha trabajado mayoritariamente antes de enfrentarse a este tema, producen obstáculos importantes en la comprensión y en el aprendizaje de las fracciones. Estos obstáculos permanecen en el tiempo y son arrastrados hasta bien avanzada la educación secundaria, e incluso, hasta la educación superior o terciaria, siendo, en alguna ocasiones, no superados en la vida adulta.

Dentro del campo de trabajo de las fracciones en la escuela primaria, la operatoria, en particular la adición y sustracción, suele traer a los estudiantes más inconvenientes de los deseados. Ello plantea un desafío al docente, quien debe gestionar dicho aprendizaje. Para ayudar en esta labor, esta propuesta pretende trabajar el algoritmo de la adición (y sustracción) de fracciones, pero no por la mecanización, sino desde la resignificación del mismo, para así aportar a la compresión de éste y de otros conceptos asociados, presentes en el proceso de la

operatoria. Sin embargo, para resignificar los algoritmos aditivos de fracciones, es indispensable resignificar el concepto de fracción. Para ello deberemos considerar los algoritmos que los estudiantes han trabajado en su enseñanza formal, y la cercanía que estos tienen con los que aquí se plantean.

Al plantear la resignificación de los algoritmos aditivos de fracciones, no solo se trata de problematizar la adición para que estos procedimientos de cálculo entren en conflicto, sino que se trata de dar sentido a los diferentes aspectos que están presente, y de esta manera dar una herramienta a los alumnos, para comprender cada uno de los pasos del algoritmo convencional.

Para plantear la secuencia didáctica, seguiremos el esquema del ciclo de aprendizaje planteado por Jorba y Sanmartí (1996) (Exploración, Sistematización, Introducción de nuevos conceptos, Aplicación), articulándolo con el programa epistemológico llevado a cabo en el Centro Felix Klein de la Universidad de Santiago de Chile (Espinoza, Barbé y Gálvez, 2009), basado en los elementos principales de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1997) y de la teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986), de las cuales se rescatarán las fases de Problematización, Trabajo de la Técnica e Institucionalización, y el concepto de variable didáctica para hacer evolucionar la secuencia didáctica.

7.2 El Concepto de Fracción

7.2.1 Aspectos históricos

Llegar a la comprensión del concepto de fracción, es un largo camino debido a sus múltiples interpretaciones, sin mencionar las ya establecidas desde el lenguaje cotidiano, cuestión que suele estar presente en los procesos de aprendizaje de estos temas (Llinares y Sánchez, 1997).

Al hacerse la pregunta "¿qué son las fracciones?", es necesario preguntarse también cómo surgen, ya que la concepción de una idea matemática va directamente relacionada con su emergencia y evolución histórica. En este sentido, no podemos desconocer que los objetos matemáticos han sido construidos a partir de alguna necesidad social: "todo conocimiento es una respuesta, una adaptación que la humanidad ha logrado ante situaciones que ha enfrentado, o ante problemas que se ha planteado" (Gálvez, 1994). Por lo tanto, para entender el sentido de las fracciones, es preciso indagar qué es aquello que les dio origen.

Según los diferentes registros históricos, todo apunta a que fue la necesidad de medir y de resolver situaciones de reparto, en las que el objeto medido, o la medida de la porción repartida, resultó ser una cantidad no entera, lo que propició la emergencia de lo que hoy llamamos *fracción*. Ya en el *Chóu–Peï*, obra matemática

china escrita alrededor del 1200 a.C., aparecen diversos problemas en los que se utilizan números fraccionarios. Por otra parte, tanto los griegos como los romanos conocían las fracciones unitarias de los egipcios, pero rehuían realizar cálculos con ellas (Contreras, 2004).

El registro más antiguo relativo a su origen, se debe a las civilizaciones babilónica y egipcia. Alrededor del año 2500 a.C., los babilonios decidieron uniformar sus medidas, ya que requerían de facilitar sus intercambios comerciales. Establecieron un sistema de sub-unidades: la unidad menor era el dedo, 30 dedos componían un codo, y 120 codos una vara[7]. Una medida determinada podía ser expresada en una cierta unidad de medida, por ejemplo siete codos, pero cuando dicha medida no era una cantidad entera, surge la necesidad de fraccionar dicha cantidad, por ejemplo, siete codos y un tercio de codo, permitiendo de esta manera cuantificarla. Como alternativa a este sistema, se utilizaron submúltiplos de dicha medida, o bien unidades de medidas menores para complementar, por ejemplo, siete codos, un palmo y tres dedos. Sin embargo, a la hora de operar con cantidades expresadas de ese modo, por ejemplo, multiplicar, la tarea se volvía compleja. Así, la fracción resultaba ser una noción más eficaz para efectuar dichos cálculos, al estar expresada la medida en una sola unidad.[8]

El concepto de fracción, también fue utilizado para medir porciones no enteras de un reparto. En el papiro de Rhind, o papiro de Ahmés, documento escrito hace casi 4000 años (1650 a.c.), es posible apreciar la costumbre egipcia de expresar toda fracción como una suma de fracciones unitarias. Aparece, por ejemplo, la descomposición en fracciones unitaria de la fracción $\frac{2}{47}$[9]:

$$\frac{2}{47} = \frac{1}{30} + \frac{1}{141} + \frac{1}{470}$$

Este resultado se explica por la forma en que se hacía la repartición. Por ejemplo, si querían repartir 4 panes en partes iguales entre 7 personas, los egipcios dividían cada pan en dos y entregaban medio pan a cada persona. El medio restante, lo dividían en siete partes, cada una de las cuales corresponde a un catorceavo de pan, y repartían una de aquellas partes a cada persona. Por lo tanto, cada invitado

7 Información disponible en http://galileoandeinstein.physics.virginia.edu/lectures/Contando_en_Babilonia.htm (12 agosto 2010).

8 Información disponible en http://personal.us.es/cmaza/egipto/fracciones1.htm (12 agosto 2010).

9 Información extraída de “Historia del Papiro de Rhind y similares”, de Angel Pulpón Zarco, Universidad de Castilla- La Mancha, Escuela de Ingeniería Técnico Agrícola, Departamento de Matemática Aplicada, disponible en http://matematicas.uclm.es/ita-cr/web_matematicas/trabajos/165/el_papiro_de_Rhind.pdf (9 octubre 2010).

recibía $\frac{2}{12} + \frac{1}{14}$ de pan, lo que en nuestra notación actual equivale a $\frac{4}{7}$ de pan[10]. En la medida que se institucionaliza la fracción como un objeto matemático, éste se vuelve un tipo de número que permite expresar la medida de las porciones no enteras. Aún así, seguía resultando complejo operar con la notación egipcia. Los griegos, por ejemplo, marcaban el numerador con un acento y el denominador con dos; o bien colocaban al denominador sobre el numerador (como actualmente anotamos los exponentes). Finalmente, fueron los hindúes quienes resolvieron el problema de la notación, escribiendo el numerador sobre el denominador. De hecho, los antecedentes más antiguos acerca de la resolución de operaciones con números fraccionarios o quebrados, datan de Aryabhata, en el siglo VI d.C. y Bramagupta, en el siglo VII d.C.

Por su parte, la mayoría del mundo árabe utilizaba una escritura similar a la egipcia, para representar fracciones. Pero es a mediados del siglo IX d.C., cuando Muhammad ibn Mūsā al-Jwārizmī, adopta la notación hindú al redactar un manual sobre aritmética que recoge precisamente, toda la tradición matemática india. No es sino hasta el siglo XII que la obra de Al-Jwārizmī es traducida al latín, y uno de sus grandes difusores -Leonardo de Pisa-, comienza a hacer uso de la línea horizontal para representar divisiones originando la notación actual.

El uso social que se ha hecho del concepto de fracción, tanto en las culturas antiguas como en la época moderna, ha estado fuertemente vinculado a una relación parte-todo, basada en el reparto equitativo. El ejemplo egipcio es iluminador, ya que ellos separaban el todo en partes, y éstas a su vez, se repartían equitativamente. Sin embargo, hay otras nociones de fracción que emergen en la historia. Si los egipcios hubieran denotado la repartición del pan como $\frac{4}{7}$, estos hubieran cuantificado la medida de la repartición, y aunque se relaciona con la idea de parte-todo, la concepción predominante en este caso hipotético, hubiera sido la fracción como medida. Lo importante de rescatar, es que en ambos casos las fracciones se presentan como un constructo matemático, que permite expresar medidas o porciones (cantidades) no enteras, de una unidad u objeto unitario. En el siguiente apartado ahondaremos en estos aspectos, y en las diferentes interpretaciones del concepto de fracción.

---

10 Se ha de hacer énfasis, en que los egipcios utilizaban casi exclusivamente fracciones unitarias, las únicas excepciones conocidas son las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$. (Información disponible en http://matematicas.uclm.es/ita-cr/web_matematicas/trabajos/165/el_papiro_de_Rhind.pdf).

7.2.2 Modelos teóricos contemporáneos, o ¿cuál es la naturaleza de las fracciones en el discurso matemático escolar actual?

La forma en la que se aborda un determinado tema en el sistema educativo, no es independiente de la concepción del aprendizaje. Históricamente, la concepción predominante ha descompuesto los saberes, como si fuesen parcelas de conocimiento que posteriormente, son "transmitidas" a los estudiantes. Dichos saberes se presentan frecuentemente de manera inconexa, y escindidos de su origen. Para Gálvez (1994), "esta manera de organizar la enseñanza, no atribuye importancia al contexto específico (situación), donde los conocimientos son adquiridos, ni a su significación y valor funcional, durante su adquisición" (p. 46).

Los procesos de aprendizaje de las fracciones, no están ajenos a estos procesos de parcelación y descontextualización histórico-epistemológica. Las continuas dificultades en torno al aprendizaje de este concepto (Newstead y Murray, 1998), y su presencia como uno de los mayores obstáculos para la maduración matemática de los estudiantes (Behr, Lesh, Post y Silver, 1983), las han transformado en uno de los temas más estudiados en la matemática educativa (Fandiño, 2005), y han llevado a preguntarse por la propia naturaleza del concepto.

En este sentido, diversos autores han señalado la multitud de significados en que el objeto *fracción* se ve involucrado, y los problemas de aprendizaje que esta polisemia trae consigo (Kieren, 1976). En un reciente estudio, Flores (2010), sistematiza diversos modelos o concepciones de las fracciones, con los que se ha estado trabajando en las últimas décadas, señalando que existen hasta 14 significados de fracción en el discurso matemático escolar. Sin embargo, es el modelo propuesto por Kieren (1988), el que concentra los principales significados de fracción, sobre la base de comprensión del número racional. Este modelo contempla cinco significados principales:

a) **Fracción como parte-todo o partes de una unidad**: considera la fracción $\frac{a}{b}$ como la relación que existe entre un todo"b", continuo o discreto, dividido en partes alícuotas[11], y una parte "a", que indica un cierto número de partes alícuotas del todo.

b) **Fracción como división o cociente**: la fracción $\frac{a}{b}$ es el resultado de una situación de reparto, donde se busca conocer el tamaño de cada una de las partes resultantes al distribuir "a" unidades, en "b" partes iguales.

c) **Fracción como resultado de una medida**: se relaciona con su origen histórico correspondiente a expresar una medida tal, que no se puede cuantificar

11 Se entiende por *partes alícuotas* las que son capaces de medir exactamente a su todo.

con una cantidad entera de unidades de medida. En este caso, la unidad de medida se ha dividido en "b" subunidades iguales, y se ha repetido "a" veces para completar la medida deseada. Por lo tanto $\frac{a}{b}$ representa "a" veces $\frac{1}{b}$.

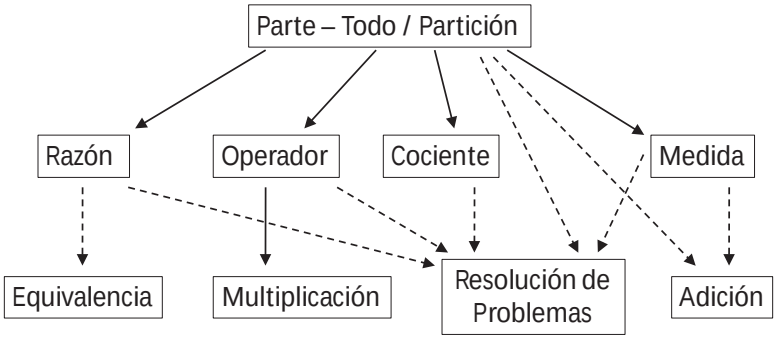
d) **Fracción como operador**: la fracción es un objeto que modifica un valor multiplicándolo por "a" y dividiéndolo por "b", en que a y b son números enteros positivos.

e) **Fracción como razón**: la fracción $\frac{a}{b}$ indica una comparación entre dos cantidades a y b, citadas en el mismo orden en que han sido comparadas.

En una mirada transversal a estas cinco interpretaciones de fracción, todas ellas excepto la fracción como operador, hacen mención a un referente. En la interpretación parte-todo, la fracción depende de qué se considera por eso todo; en la interpretación como división se debe tener claridad qué es aquello que se reparte; al considerar la fracción como medida, se debe tener en cuenta la medida que se subdivide; y en la interpretación como razón, la fracción depende de las cantidades que se comparan. Sin embargo, al considerar la fracción como operador, nos acercamos a la idea de la fracción como número, despojado de referente concreto. Relevamos éste, la vinculación de la fracción al referente dependiendo de su interpretación, pues influye en las propuestas de actividades que se trabajan con los estudiantes en el aula. Proponer una actividad que utilice un contexto determinado, requerirá la reflexión previa de qué interpretación se está usando o proponiendo trabajar.

Por otra parte, llegar a conocer funcionalmente cada una de estas interpretaciones del "mega" concepto de fracción, "conlleva el dominio de diferentes estructuras cognitivas, entendidas como esquemas de pensamiento subyacente a las acciones necesarias, para desarrollar tareas que implican la idea de número racional" (Llinares y Sánchez, 1997, p. 75), para cualquiera de estas interpretaciones. Estas estructuras cognitivas, condicionan significativamente las secuencias de enseñanza de este concepto, según el momento de desarrollo en que se encuentre el estudiante.

Como ya se anticipa, es muy difícil aislar cada una de estas interpretaciones para llegar a la comprensión del número racional, ya que en mayor o menor medida, éstas están vinculadas de forma "natural". Para comprender estas relaciones, los trabajos de Behr *et al*. (1983), ofrecen un modelo mediante el cual podemos estudiar las relaciones establecidas (flechas continuas), y las relaciones que se puede conjeturar (flechas segmentadas). Estos autores proponen una relación entre las diferentes interpretaciones ya señaladas por Kieren, y las operaciones básicas de fracciones y la resolución de problemas.



Fuente: Behr et al., 1983, p. 100

A partir de este modelo, Charalambous y Pitta-Pantazi (2005), sostienen, en primer lugar, que la interpretación *parte-todo* y su relación con los procesos de partición, se considera fundamental, aunque no suficiente, para desarrollar una adecuada comprensión de las demás interpretaciones de las fracciones. En cualquier caso, la preponderancia de esta interpretación, es lo que justificaría que en muchos currículos, este aspecto tome un rol central, sobre todo en los primeros años en que se introduce el concepto de fracción (Baturo, 2004). En segundo lugar, el diagrama sugiere que la interpretación de fracción como *razón,* se considera lo más "natural" para promover el concepto de equivalencia, y consecuentemente, el proceso de encontrar fracciones equivalentes. Además, la concepción de *operador* y *medida*, ayudan de gran manera a desarrollar una comprensión sólida de la multiplicación y adición de fracciones, respectivamente. Finalmente, comprender las cinco interpretaciones de las fracciones, se considera indispensable para llegar a resolver problemas en el campo de las fracciones.

Con este recorrido por las interpretaciones de fracción y sus relaciones, se evidencia que el concepto es complejo, y que en relación a la enseñanza, es conveniente, como mínimo: (a), considerar objetivos a largo y corto plazo, en relación a cada una de las interpretaciones, (b), seleccionar las interpretaciones apropiadas para desarrollar esos objetivos, teniendo en cuenta las estructuras cognitivas necesarias, y (c), proporcionar secuencias de enseñanza (actividades), que contribuyan al desarrollo de estas estructuras (Suydam, 1979). Considerando estos tres aspectos, planteamos una propuesta de enseñanza que permite repensar y reconceptualizar, muchos de los elementos asociados a fracciones, por medio del tratamiento de algoritmos, y principalmente, la resignificación de ambos aspectos, en el contexto de una interpretación de fracción como medida. La resignificación busca hacer una distinción de origen, con respecto de la preexistencia de los objetos y procesos matemáticos, emergiendo entonces como elemento, para dar cuenta de que el conocimiento tiene significados propios y contextualizados, lo cual enriquece el significado de los conocimientos (García y Montiel, 2007, p. 159).

Antes de presentar la secuencia de enseñanza, referiremos a algunos aspectos de esta interpretación en particular, y abordaremos cuestiones claves en cuanto a los algoritmos aditivos para fracciones.

7.2.3 Fracciones como medida

En lo que respecta al trabajo que proponemos en esta unidad, nos concentraremos en la concepción de fracción como parte todo y como medida, concepciones que según Llinares y Sánchez (1997), están íntimamente relacionadas, siendo la primera el fundamento de la interpretación de la segunda.

Ya hemos mencionado que el conocimiento matemático surge de contextos históricos, y necesidades humanas. Para darle una razón de ser a las fracciones como objeto matemático, revivimos en esta secuencia didáctica su emergencia histórica, poniendo a los estudiantes en una situación en la que deben cuantificar una medida no entera. De esta manera, el objeto fracción surge, al comienzo de la situación didáctica, como un tipo de número que permite expresar "cuánto mide" una cierta longitud, en este caso, una cinta dada[12].

Cuando se trabajan situaciones aditivas con fracciones, es común obtener sumas mayores que un entero, que resultan difíciles de significar en el contexto del modelo parte-todo, pues surge la siguiente contradicción: *si el todo está dividido en n partes, ¿cómo puedo obtener un número de partes mayor que n?* Ampliar el concepto de fracción más allá de la idea de parte-todo, es lo que permitirá superar esta supuesta contradicción.

La conceptualización de fracción como medida, permite al estudiante ser capaz de identificar que una fracción $\frac{a}{b}$ es a veces $\frac{1}{b}$, es decir, que si repite 2 veces $\frac{1}{3}$ obtendrá $\frac{2}{3}$, y si lo repite 4 veces, obtendrá $\frac{4}{3}$. Las situaciones de medición son un contexto propicio y natural, en el cual se obtienen habitualmente medidas no enteras mayores que uno o que varios enteros, por lo que resulta más apropiado para que el estudiante signifique las cantidades fraccionarias, mayores que el entero. Aun así, la interpretación de fracción como parte-todo no queda fuera, ya que fundamenta la interpretación como medida, lo cual se ve claramente cuando el estudiante observa que al repetir 3 veces $\frac{1}{3}$ obtiene un entero, lo cual se relaciona con que $\frac{1}{3}$ es una parte de un entero que se ha dividido en tres.

12 Inicialmente, los estudiantes miden la cinta con una unidad de medida y con partes de dicha unidad. Sin embargo, para poder cuantificar el valor de cada trozo de cinta, han de "repetir" el trozo en la unidad de medida, tantas veces como sea necesario. En esa acción, es la noción parte-todo la que les permite saber a qué parte de la unidad de medida, corresponde el trozo.

7.2.4 Consideraciones sobre los algoritmos aditivos

Pareciera ser que hablar de las distintas interpretaciones de las fracciones, pone énfasis en lo conceptual más que en lo procedimental. Sin embargo, las concepciones de fracciones, tal como vimos en el esquema de Behr, apuntan a la resolución de problemas, y para ello son necesarias ciertas claridades sobre las operaciones que permiten resolverlos. En particular, en el apartado anterior, hemos visto cómo las situaciones de *medida*, junto con las de *parte-todo*, se relacionan con las situaciones de adición; y es en su operatoria donde deseamos centrar este trabajo.

Al plantearse la enseñanza formal del algoritmo aditivo para fracciones, surgen grandes discrepancias de cómo hacerlo, al contrario del consenso existente en cuanto a las interpretaciones de una fracción. En este punto, es conveniente distinguir entre el concepto de la operación y su algoritmo, tal como señalan Llinares y Sánchez (1997):

> *"[Se ha de hacer la distinción entre] comprender el significado de la operación, estando este punto vinculado a la aplicación de la operación en la resolución de situaciones problemáticas, y ser hábil en la ejecución de los pasos necesarios, y en el orden correcto, que llevan a la obtención del resultado de una operación; lo que en lenguaje usual, se denomina realizar los cálculos"* (p. 132).

Esta distinción ayuda a sobreponerse a la larga discusión sobre si enseñar o no, o de qué manera, los algoritmos para operar con fracciones. En la gran mayoría de los procesos de aprendizaje, este manejo aritmético se vuelve mecanicista y sin sentido para el aprendiz, lo que lo lleva, o bien a reemplazarlos por otros con mayor significado, o bien a modificarlos, convirtiéndolos en procedimientos erróneos. Las razones para este manejo mecanicista son variadas, pero se destaca, por una parte, la introducción demasiado temprana de la enseñanza del algoritmo en la escuela, y por otra, la "introducción desvinculada de un fundamento suficientemente concreto y natural de la operación" (*op. cit*, p. 133).

Estas razones hacen ver claramente, que no basta con un tiempo prolongado de trabajo sobre los algoritmos, sino una vinculación con el significado de cada uno de los pasos. Es aquí donde presentamos la idea de resignificación, a través del estudio de situaciones de medida, que es uno de los contextos originarios de las fracciones. Para llevar esto a cabo, debemos tener en cuenta que ciertas operaciones aparecen de forma natural en ciertas situaciones problemáticas, y que en el caso particular de la suma y resta de fracciones, se necesita de fracciones equivalentes para desarrollar su algoritmo, cuestión que no ocurre con la multiplicación y división, lo que pone al algoritmo aditivo en un nivel de complejidad mayor para los estudiantes.

Las secuencias de enseñanza para trabajar el algoritmo aditivo de fracciones, pueden variar según las consideraciones y las experiencias de cada profesor o profesora. Sin embargo, es claro que se debe ir recorriendo un camino con los estudiantes, desde sus propios modelos para sumar y restar fracciones hacia el algoritmo convencional, el cual es de un mayor nivel de abstracción a la vez que es de mayor eficiencia, al ser capaz de resolver cualquier situación aditiva con fracciones.

Uno de los caminos que ha probado tener buenos resultados para lograr esta transición, es plantear secuencias donde varíe el tipo de fracción presente en las actividades propuestas (sin dejar de lado la naturaleza de la situación y su relación con las operaciones aditivas). Las primeras situaciones que se podría plantear, corresponden al uso de fracciones con igual denominador (ej. $\frac{2}{8} + \frac{3}{8}$), ya que para resolverlas solo es necesario un proceso de conteo: dos octavos y tres octavos son cinco octavos, lo que se basa en definitiva en la suma o resta de fracciones unitarias (con numerador 1). Si se representan las fracciones en este tipo de situaciones, se debe tener cuidado al señalar el objeto unidad, y que éste sea el mismo para cada una de las particiones que hemos seleccionado (2 y 3 de 8). La evolución de esta situación, y por tanto la dificultad que se puede presentar, corresponde cuando la "unidad que se cuenta" ya no es la misma en ambos sumandos, es decir, cuando sumamos o restamos fracciones con distinto denominador. Sin embargo, aun se puede utilizar la técnica de "contar", si es que se logra encontrar fracciones equivalentes, llevando este caso al anterior (mismo denominador). Dentro de este tipo de situaciones, se presentan tres casos según la relación entre los denominadores:

a. Fracciones con **denominadores múltiplos entre sí**:

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{6} = ? \quad , \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = ?$$

b. Fracciones con **denominadores primos entre sí**:

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{2} = ? \quad , \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = ?$$

c. Fracciones con denominadores con un factor común:

$$\frac{2}{6} + \frac{3}{4} = ? \quad , \quad \frac{3}{8} - \frac{2}{6} = ?$$

En cualquiera de los tres casos, la estrategia sería buscar fracciones equivalentes de modo tal, que ambas fracciones queden con un denominador común. En este sentido, no es necesario llegar rápidamente al mínimo común múltiplo, ya que éste es un proceso de mayor nivel de abstracción. Aun así, deberíamos potenciar la transición hacia el algoritmo convencional, pero dotado de significado, para lo cual secuencias como ésta son un recurso, que insertado en un contexto de interpretación como la medida, puede colaborar para un mayor y mejor aprendizaje.

7.3 Diseño de la Unidad Didáctica

7.3.1 Planificación docente

UNIDAD. RESIGNIFICACIÓN DEL ALGORITMO PARA OPERAR ADITIVAMENTE CON FRACCIONES		
CONTENIDO MATEMÁTICO	Conceptual	• Resuelven problemas aditivos directos, simples, de composición. • Calculan sumas de medidas fraccionarias con distinto denominador. • Construyen y justifican procedimientos de cálculo aditivo.
	Procedimental	• Cuantificar las medidas iniciales utilizando fracciones con distintos referentes (las que surjan de la cuantificación de los trozos que compusieron la medida inicialmente). • Construir reglas graduadas en diferentes fracciones de la unidad de medida de referencia.
	Actitudinal	• Desarrollar habilidades de argumentación matemática. • Comunicar información usando un lenguaje matemático.
OBJETIVOS	General	• Resignificar el algoritmo para sumar y restar fracciones a través de una convención matemática.
	Específicos	• Resignificar el concepto de fracción, como un tipo de número que permite cuantificar cantidades o medidas no enteras. • Ampliar el significado del concepto de fracción utilizando como referente el modelo de fracción como medida. • Construir un algoritmo para sumar y restar fracciones a partir de la resolución de situaciones problemáticas.
APRENDIZAJES ESPERADOS	Construyen y justifican procedimientos de cálculo para resolver problemas aditivos con fracciones.	
DESTINATARIOS	Estudiantes de 12-13 años.	
TEMPORALIDAD	4 sesiones de clase de 2 horas pedagógicas de 45 min. cada una.	

<table>
<tr>
<td>MATERIALES</td>
<td>
• Un set con cintas:
- 1 cinta cuya longitud es una unidad de medida arbitraria denominada “yuan” (miden 1 yuan)
- Trozos de cinta diferentes colores y tamaños que representan fracciones unitarias del yuan:
<table>
<tr><td>$\frac{1}{2}$</td><td>1 trozo</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{3}$</td><td>2 trozos</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{4}$</td><td>3 trozos</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{5}$</td><td>3 trozos</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{6}$</td><td>3 trozos</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{8}$</td><td>4 trozos</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{12}$</td><td>6 trozos</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{15}$</td><td>5 trozos</td></tr>
</table>
- 10 cintas iguales al yuan confeccionadas en micas transparentes (miden 1 yuan)
• Plumones permanentes que permiten escribir en las micas (punta fina).
</td>
</tr>
</table>

7.3.2 Desarrollo de la unidad

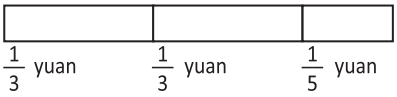
Las dos primeras sesiones plantean actividades **exploratorias** con apoyo de material concreto, para problematizar el concepto de fracción como medida. Al finalizar éstas, se espera que los estudiantes hayan conceptualizado el objeto matemático “fracción”, como un número que permite cuantificar medidas y/o cantidades no enteras. En la tercera sesión, se **introducen los conceptos** de amplificación y simplificación, como procedimientos que permiten expresar fracciones iguales, en términos de distintas unidades de medida (medios como sextos, como cuartos, etc). Mediante la **sistematización** de dichas relaciones y procedimientos en la cuarta sesión, las y los estudiantes construirán un algoritmo para sumar fracciones, cuyos denominadores son uno múltiplo del otro, sin el apoyo del material concreto. Por último, la quinta sesión tiene por objeto que los estudiantes **apliquen** la técnica construida en la sesión anterior, para sumar y restar fracciones cuyos denominadores se relacionan de los diversos modos posibles.

I. Exploración

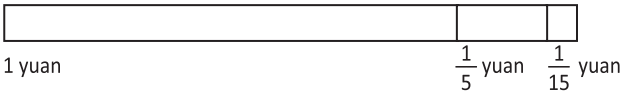
Esta fase se inicia con una **primera sesión,** en la que se plantea la necesidad de medir unas cintas no numeradas, utilizando como referente una unidad de medida desconocida, llamada *yuan*.

En la pizarra están ubicadas las siguientes cintas blancas, sin las divisiones, las que deben ser medidas por los estudiantes organizados en grupos. Las divisiones y las respectivas expresiones de la medida de las cintas que se presentan aquí, son tentativas, ya que las mismas pueden ser compuestas por otros trozos de yuan que determinen una longitud equivalente.

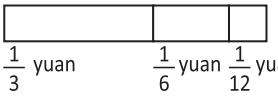
a)



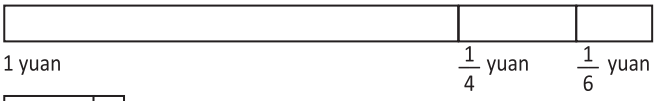
b)



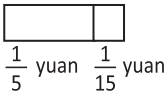
c)



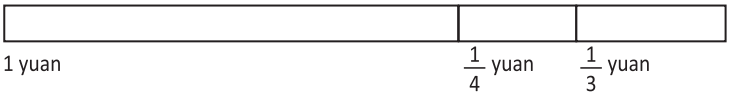
d)



e)



f)



Para ello, cada grupo dispone de dos sets con una cinta cuya longitud es una unidad de medida arbitraria (1 yuan), y varios trozos de diferentes colores y tamaños que representan fracciones unitarias del yuan ($\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20}$). Además, tienen micas transparentes que miden 1 yuan y plumones que permiten escribir en ellas.

En una primera instancia, se le pide a un(a) estudiante de cada grupo, que pase a medir cada uno ,una cinta distinta utilizando los trozos que tiene en su grupo. Se les indica que peguen los trozos elegidos debajo de la cinta. Se espera que seleccionen dos o tres trozos, que en conjunto compongan la longitud de cada cinta puesta en la pizarra.

Una vez que han sido medidas todas las cintas, la o el docente problematiza la situación preguntando al curso “¿cuánto mide esta cinta?”. Se espera que los

estudiantes señalen que, para poder comunicar la cuantificación de la medida, es necesario averiguar a qué parte de 1 yuan corresponde cada uno de los otros trozos de colores, utilizados para medir las cintas blancas.

Luego de establecida dicha idea, la o el docente toma uno de los trozos fraccionarios y le pregunta al curso, "o?" La discusión debería ser gestionada por el/la docente, de manera tal que surja la idea de repetir varias veces la medida del trozo, hasta ver cuántos de ellos componen un yuan. Luego les pide que investiguen la medida de cada trozo de color.

Es posible que algún grupo utilice las micas transparentes y plumones, para marcar las medidas en ellas, construyendo así, "reglas graduadas en fracciones de yuan"; pero también puede ocurrir que muchos repitan la medida del trozo, utilizando el yuan de cartulina como referente, haciendo pequeñas marcas o incluso sin anotar. En este momento de la clase, el interés está puesto en investigar el valor de cada trozo de yuan, y por tanto, la construcción de las reglas no es indispensable. Sin embargo, es posible incentivar su uso socializando la idea si surge en algún grupo. Una vez que han averiguado el valor de cada trozo de color, cuantifican las mediciones de las cintas blancas, y las anotan en la primera columna de una ficha grupal (ficha 1).

FICHA 1

Expresen las mediciones de las cintas en la primera columna de la siguiente tabla:

Cintas	Medida en yuan y fracciones de yuan		Total
a)			
b)			
c)			
d)			
e)			
f)			

Cuando todos los grupos han efectuado sus mediciones, se realiza una puesta en común, registrando las medidas en la pizarra en una tabla como la siguiente.

Cintas	Medida en yuan y fracciones de yuan		Total
a)	$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$	$\frac{2}{3} + \frac{1}{5}$	
b)			
c)	$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{12}$	
d)	$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$	$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$	
e)			
f)			

Si hay más de una forma de expresar la medida, se anota cada opción surgida. Aunque es poco probable que emerjan combinaciones de fracciones no unitarias, si surgen, es importante registrarlas. Cada grupo registra la medición distinta a la suya, en la segunda columna de la tabla de la ficha 1. La tercera columna se utilizará en la segunda sesión.

Al cierre de esta actividad, es importante dar énfasis a que existe más de una manera de expresar las medidas, y si es posible, identificar las igualdades entre algunas de las fracciones utilizadas, y dejarlas registradas a un costado de la pizarra.

ACTIVIDAD 1

Síntesis Para la o el Docente

Materiales: Huincha que representa una unidad de medida desconocida (*yuan*), varios trozos de diferente tamaño y color menores que un yuan, micas de transparencias y plumón.

Necesitamos medir estas cintas blancas, en una unidad de medida distinta a las nuestras, en "*yuan*". Tenemos un *yuan*, y también tenemos trozos que son parte de esta unidad de medida.

a) ¿Qué podríamos hacer para medir las cintas?

b) ¿Cómo podríamos expresar **cuánto** mide cada una de estas cintas?

En la **segunda sesión,** se plantea el desafío de expresar las medidas de las cintas de la sesión anterior, utilizando un solo referente: una sola fracción de yuan, o un yuan y fracción, dependiendo si la cinta es mayor o menor que un entero. El/la docente, inicia la clase formulando la pregunta: ¿Qué podemos hacer para expresar las mediciones realizadas en la clase anterior, utilizando un solo referente

(cuartos, quintos, sextos, etc)? En la pizarra están puestas las cintas y la tabla con sus respectivas mediciones.

Se espera que los estudiantes propongan utilizar reglas graduadas. Si en la clase anterior no surgió la idea de utilizar las micas, para marcar sucesivamente la medida de los trozos pequeños de yuan, se les puede preguntar directamente si las micas pueden ayudar a resolver el problema. Si la idea de las reglas graduadas surgió, pero de manera aislada, el /la docente conduce una reflexión acerca de su utilidad, y los insta a que cada grupo construya sus propias reglas para medir utilizando, en cada una de ellas, una sola fracción como referente.

Cuando cada grupo tiene sus reglas, se les plantea utilizarlas para expresar la medición con una sola fracción. Para ello, simultáneamente, sale un integrante de cada grupo a medir una cinta cualquiera, y la anota en su ficha grupal. Luego, sale otro integrante de cada grupo a medir otra cinta, y así sucesivamente, hasta que cada grupo ha medido todas las cintas.

Una vez que todos los grupos han terminado de medir, se realiza una puesta en común anotando las mediciones en la tercera columna de la tabla. Es importante que, si hay más de una forma de expresar la medida de una cinta, se anoten las distintas opciones en la tabla, puesto que al terminar la actividad, la o el docente se apoyará en ella para conducir una reflexión acerca de la equivalencia o igualdad entre fracciones.

TABLA (Ejemplo)

Cintas	**Medida en yuan y fracciones de yuan**		**Total**
a)	$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$	$\frac{2}{3} + \frac{1}{5}$	$\frac{13}{15}$ de yuan
b)			
c)	$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{12}$	$\frac{7}{12}$ de yuan
d)	$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$	$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$	1 yuan y $\frac{5}{12}$ de yuan
e)			
f)			

Para ello, es conveniente relacionar las fracciones de la primera y segunda escritura, con la que utiliza un solo referente, enfatizando que la suma de fracciones unitarias de yuan es igual a una fracción no unitaria que utiliza una unidad de medida o referente común a ambos sumandos. Es decir, que si repito 13 veces un quinceavo, formaré la misma medida que $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$, porque con $\frac{5}{15}$ formo $\frac{1}{3}$ y

con $\frac{3}{15}$ formo $\frac{1}{5}$. Lo mismo ocurre si repito 2 veces $\frac{1}{3}$ formo $\frac{2}{3}$. Es decir, lo importante es hacer notar que dicha medida común, se repite varias veces para formar la fracción no unitaria. Es conveniente invitar a los estudiantes a verificar dichas igualdades con los trozos de yuan.

En el cierre de la sesión, interesa relevar la idea de que una suma de fracciones se puede expresar como una sola fracción que utiliza como referente, una unidad de medida común a todos los sumandos. Por ejemplo, en el caso de la cinta c), se les puede preguntar qué tienen en común el los doceavos, los sextos y los tercios, buscando que emerja como idea que los sextos y los tercios se pueden medir en doceavos (pueden superponer las reglas graduadas para ello). Lo mismo se puede realizar con cada una de las otras cintas: los tercios y los quintos se pueden medir en quinceavos; los cuartos y los sextos en doceavos, etc. Es importante dejar registradas en la pizarra las distintas equivalencias surgidas en la clase (entre una fracción y otra, o entre una suma y una fracción), pues serán retomadas en la tercera y cuarta sesión respectivamente.

ACTIVIDAD 2

Síntesis Para el o la Docente

Materiales: Micas para hacer reglas graduadas en yuan. Cintas pegadas en la pizarra.

Por grupos, participarán en una actividad consistente en construir reglas graduadas en yuan, para medir las cintas que están en la pizarra. De este modo podrán expresar las mediciones con un solo referente o unidad de medida: una sola fracción de yuan, o un yuan y una fracción, dependiendo si la cinta es mayor o menor que un entero.

Por turnos, sale un estudiante de cada grupo a medir una cinta, y anota la medición en la tercera columna de la tabla de la ficha 1. Después de que cada grupo haya medido todas las cintas se realizará una puesta en común.

Cintas	Medida en yuan y fracciones de yuan		Total
a)	$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$	$\frac{2}{3} + \frac{1}{5}$	$\frac{13}{15}$ de yuan
b)			
c)	$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{12}$	$\frac{7}{12}$ de yuan
d)	$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$	$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$	1 yuan y $\frac{5}{12}$ de yuan
e)			
f)			

II. Introducción de nuevos conceptos

La **tercera sesión,** tiene por objetivo que los y las estudiantes puedan consolidar la idea que señala que una misma cantidad, se puede expresar con fracciones que utilizan diferente unidad de medida. Y que surja el concepto de amplificación y simplificación, como procedimientos útiles para expresar una fracción como otra igual, con distinta unidad de medida como referente.

Para ello, el o la docente escribe en la pizarra algunas de las igualdades entre fracciones individuales, surgidas en las sesiones anteriores.

El o la docente comienza la sesión recapitulando lo trabajado en las fases anteriores: señala[13] que en la *primera sesión* midieron las cintas utilizando *yuanes* y trozos de *yuanes*, y que luego expresaron cuánto mide cada cinta. En este momento les pregunta a niños y niñas, si esa actividad les permitió descubrir para qué sirven las fracciones. La idea es destacar el carácter funcional de las mismas. Se espera que respondan que sirven para expresar cantidades o medidas no enteras. En la *segunda sesión,* expresaron la medida de cada cinta como una sola fracción de *yuan*, o un *yuan* y una fracción, utilizando las reglas graduadas en *yuan*. Recuerda que a través del trabajo realizado en ambas sesiones, fueron surgiendo las igualdades o equivalencias que ha anotado nuevamente en la pizarra y pregunta: $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

- *¿Qué operación matemática nos permite expresar esta fracción (por ejemplo $\frac{2}{8}$) como esta fracción ($\frac{1}{4}$)?*

Se espera que chicos y chicas señalen que deben dividir en dos, tanto el numerador como el denominador de la fracción $\frac{2}{8}$. O bien, multiplicar por dos el numerador y el denominador de la fracción $\frac{1}{4}$.

Es importante aquí profundizar en dos ideas que frecuentemente se convierten en obstáculos didácticos:

- Se produce una confusión entre la división o la multiplicación de la fracción, y la división o multiplicación de numerador y denominador, como procedimiento para buscar fracciones iguales con distinta medida.

- Los estudiantes piensan que al simplificar se achica la fracción y que al amplificar, se agranda.

13 También puede gestionar el inicio con preguntas conducentes a rememorar lo realizado en las sesiones previas.

Resulta muy conveniente, en ese sentido, problematizar a los estudiantes tomando el material concreto, y mostrando que al dividirlo o multiplicarlo no se origina la igualdad. Por ejemplo se pueden tomar dos trozos de 1/8 de yuan, juntarlos frente al curso y preguntar:

- *Estos, ¿son $\frac{2}{8}$? Si los divido en dos (los separa) ¿obtengo $\frac{1}{4}$?*
- *Este trozo, ¿corresponde a $\frac{1}{4}$. Si lo multiplico por dos (toma otro cuarto y lo pone junto al primero) ¿obtengo $\frac{2}{8}$?*[14]

Es probable que en este momento surja el concepto de amplificación o simplificación, como respuesta a la problematización respecto de la división y la multiplicación. Es decir, no se divide la fracción sino se simplifica y no se multiplica la fracción sino se amplifica. Entonces se puede abordar la segunda problemática preguntándoles qué es simplificar y amplificar. Con bastante frecuencia los y las estudiantes señalan que amplificar es agrandar y que simplificar es achicar la fracción, entonces es pertinente contrastar dicha afirmación tomando material concreto y preguntando:

- *¿Si $\frac{1}{4}$ lo amplifico por dos obtengo $\frac{2}{8}$? (toma $\frac{1}{4}$ y $\frac{2}{8}$ de yuan y los pone uno arriba del otro de manera que ambos queden visibles)*
- *¿Se agrandó este cuarto? ¿Cómo quedó? ¿Podemos afirmar que cuando amplificamos agrandamos la fracción?*

Otra posibilidad para verificar las igualdades, es sobreponer las reglas graduadas en las unidades de medida presentes en la igualdad.

Después de que los estudiantes han establecido fehacientemente que la simplificación y la amplificación, son procedimientos que nos permiten expresar una fracción en otra igual pero con distinta unidad de medida, y los han validado con cada una de las igualdades establecidas en las clases anteriores, se les entrega la ficha 2 (individual): buscando la misma fracción.

14 Es aconsejable, a lo largo de esta sesión, repetir esta problematización cuantas veces sea necesario, ya que es muy común confundir la simplificación con la división de la fracción, y la amplificación con la multiplicación de la fracción.

FICHA 2

Buscando la misma fracción

1. En la actividad anterior, pudieron establecer que una misma fracción se podía expresar con distinta unidad de medida, sin que la fracción cambie. Utiliza lo aprendido para buscar cuatro expresiones distintas, para las siguientes fracciones:

	Medidas
a)	$\frac{1}{2}$ =
b)	$\frac{3}{15}$ =
c)	$\frac{2}{3}$ =
d)	$\frac{1}{6}$ =

2. Marca con un visto cuáles de las siguientes igualdades son ciertas. A las falsas hazle una línea oblicua sobre el signo igual:

e)	$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$	i)	$\frac{3}{6} = \frac{5}{10}$
f)	$\frac{2}{7} = \frac{4}{21}$	j)	$\frac{4}{12} = \frac{2}{6}$
g)	$\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$	k)	$\frac{3}{5} = \frac{4}{10}$
h)	$\frac{15}{18} = \frac{5}{6}$	l)	$\frac{3}{5} = \frac{2}{10}$

Una vez que todos han desarrollado su ficha, se realiza una puesta en común contrastando las diversas respuestas dadas por los y las estudiantes. En la primera parte, es importante poner atención en las igualdades de las fracciones no unitarias, pues un obstáculo didáctico observado es constituir la "familia"[15] de fracciones unitarias, operando separadamente numerador y denominador, mediante un aumento aditivo. Luego, utilizan el mismo mecanismo para constituir las familias de fracciones no unitarias.

15 En Chile es común denominar "familia de fracciones" al conjunto de fracciones iguales entre sí.

Por ejemplo, dado que si se quiere buscar la familia de $\frac{1}{3}$, anotan sucesivamente: $\frac{1}{3} = \frac{2}{\square} = \frac{3}{\square} = \frac{4}{\square} = \cdots$ en los numeradores y $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \cdots$ en los denominadores, y obtienen la misma familia que al operar multiplicativamente sobre la fracción.

Pero si quieren buscar la familia de $\frac{2}{5}$, anotan sucesivamente $\frac{2}{5} = \frac{3}{\square} = \frac{4}{\square} = \frac{5}{\square} = \cdots$ en los numeradores y $\frac{2}{5} = \frac{3}{10} = \frac{4}{15} = \frac{5}{20} = \ldots$ en los denominadores, obteniendo fracciones que no son iguales entre sí.

En la segunda parte es importante observar que para verificar las igualdades i) y l), y también para descartar las falsas f) y k), no se puede proceder mediante amplificación o simplificación directa, sino que es necesario escribir la familia de fracciones.

Se cierra la clase retomando las problemáticas centrales: simplificar v/s dividir-achicar y multiplicar v/s multiplicar-agrandar, para precisar los conceptos de amplificación y simplificación, y reflexionando acerca de la posibilidad de establecer infinitas fracciones iguales a una dada.

III. Sistematización

En la **cuarta sesión,** el propósito es que los y las estudiantes se basen en las relaciones y técnicas trabajadas en las sesiones anteriores, para construir un procedimiento estándar para sumar fracciones, sin tener que recurrir a las reglas graduadas (éstas pueden ser utilizadas para verificar igualdades, pero no para realizar la suma).

Para ello, la o el docente ha organizado previamente algunas de las equivalencias de la tabla construida en la segunda sesión, en función de la relación entre los denominadores de la suma, y seleccionado dos o tres igualdades de entre aquellas, en la que los denominadores de la suma son múltiplos entre sí.[16]. Con apoyo en estas expresiones se pretende inducir, mediante la siguiente reflexión, la conveniencia de amplificar una de las fracciones para expresarlas con un mismo referente o unidad de medida:

16 Las otras dos posibilidades son: tener un factor común distinto de sí mismo, o no tener factor común. A este último caso también se le denomina primos relativos.

- *¿Podemos expresar las mediciones realizadas en la clase anterior como una suma?*
- *¿A qué sería igual* $\frac{3}{4} + \frac{1}{8}$ de yuan *? Consulten la tabla.*
- *Entonces ¿Cómo podríamos expresar esta suma de fracciones* $\frac{3}{4} + \frac{1}{8}$ de yuan *como una sola fracción?*
- *Recordemos algunas equivalencias establecidas en la clase anterior. Por ejemplo, ¿estamos de acuerdo en que estas expresiones son iguales?* $\frac{3}{4} + \frac{1}{8}$ de yuan $= \frac{7}{8}$ de yuan
- *Si no tenemos las cintas, ¿qué pasos podríamos seguir para hacer la transformación?*
- *Tapando el primer sumando de* $\frac{3}{4} + \frac{1}{8}$ de yuan $= \frac{7}{8}$ de yuan *: ¿qué fracción debería ir aquí para que sumado a* $\frac{1}{8}$ *permita obtener* $\frac{7}{8}$*? (Se espera que los y las estudiantes respondan* $\frac{6}{8}$*).*
- *Por lo tanto, ¿podemos afirmar que* $\frac{6}{8}$ *es equivalente a* $\frac{3}{4}$*?*
- *(Si hay dudas pregunta), ¿alguien puede venir a verificar con la cinta graduada que* $\frac{6}{8}$ *es equivalente a* $\frac{3}{4}$*? ¿Puedes verificar cuántos octavos hay en un cuarto?*
- *Entonces, ¿podríamos afirmar que por cada cuarto hay dos octavos?*
- *¿Qué procedimiento matemático nos permite expresar* $\frac{3}{4}$ *como* $\frac{6}{8}$ *si no tuviésemos las cintas? (Se espera que los y las estudiantes sean capaces de reconocer que se puede multiplicar numerador y denominador por 2, o amplificar por 2).*

De ser necesario, se repite el proceso con otras equivalencias hasta que se asimile el sentido de la amplificación, como un procedimiento surgido en el contexto de una estrategia de búsqueda de una común medida. Por otra parte, como procedimiento, es importante comprender que es una abreviación del método de comparar las longitudes de las fracciones por sumar, con las reglas graduadas en distintas medidas, hasta dar con un referente común.

Es importante que el o la docente, elija en primer lugar sólo fracciones cuyos denominadores son uno múltiplo del otro, para facilitar la inducción de la posibilidad de amplificar, para encontrar fracciones con una común medida, puesto que en este caso, basta con buscar la familia de una de las fracciones, para encontrar la fracción buscada.

A continuación, se entrega a las y los estudiantes la **Ficha 3** que plantea sumas de fracciones, cuyos denominadores son uno múltiplo del otro, incluyendo entre los sumandos fracciones no unitarias. Al término del desarrollo de la ficha, se realiza una puesta en común.

En este momento, se realiza un **cierre de la clase** sistematizando el procedimiento construido para sumar fracciones. Se espera que los y las estudiantes señalen que, para expresar la suma como una sola fracción, es posible utilizar la estrategia de buscar, mediante la técnica de la amplificación o simplificación, la familia de fracciones de uno de los sumandos, para expresar ambos sumandos con el mismo referente o unidad de medida.

IV. Aplicación

La **quinta sesión,** comienza desafiando a los estudiantes a expresar sumas y restas de fracciones, cuyos denominadores no sólo son uno múltiplo del otro, sino que tienen un factor común o son primos relativos. En esta ocasión, el trabajo es individual, a cada estudiante se le entrega una ficha con tres sumas y tres restas de fracciones con estas características. Se espera que los estudiantes sean capaces de extrapolar el trabajo realizado en la clase anterior, y se den cuenta de que pueden utilizar la técnica de amplificar o simplificar ambas fracciones, para encontrar las familias respectivas, y seleccionar aquellas que tengan un referente o unidad de medida común.

Si después de dar tiempo suficiente para resolver los ejercicios (10 minutos), se observa que los estudiantes sólo resuelven aquellas operaciones, en las que los denominadores de las fracciones son uno múltiplo del otro, y no surge la extensión del procedimiento como respuesta al desafío se podría presentar un caso extraído de la tabla:

- *Recordemos un ejemplo similar de un par de sesiones atrás. En esa ocasión, establecimos que:*

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} \text{ de yuan} = \frac{5}{12} \text{ de yuan}$$

- *¿Qué procedimiento matemático nos permitiría expresar 1/4 y 1/6 utilizando doceavos como referente?*

  Es probable que algunos estudiantes se den cuenta de que pueden expresar las fracciones como doceavos directamente, si amplifican por 3 y por 2 respectivamente (y que no es necesario escribir la familia). Si alguien no lo entiende, es importante darle tiempo para que establezca la relación. Sólo en caso de no ser así, la o el docente puede realizar preguntas específicas que la induzcan, como por ejemplo: ¿cuántos doceavos hay en un cuarto?

Entonces se puede preguntar al curso:

- *¿Cómo habríamos podido calcular la suma si no supiésemos de antemano que se podía expresar en doceavos?*

  El propósito es que los y las estudiantes reparen en que pueden buscar la familia de ambas fracciones, y seleccionar de cada una aquella que está expresada en una misma unidad de medida (en este caso doceavos, veinticuatroavos, etc.).

Una vez que los y las estudiantes han visualizado que pueden amplificar ambas fracciones, se les insta a utilizar dicho procedimiento para resolver los cálculos planteados.

Al término del desarrollo de la ficha, se realiza una puesta en común. El o la docente le pide sucesivamente a tres estudiantes, que relaten detalladamente qué hicieron para sumar una fracción determinada cada uno, teniendo cuidado en incluir los tres tipos de relaciones entre los denominadores (uno múltiplo del otro, primos relativos, y con un factor común).

En el primer caso, se busca relevar el hecho de que es necesario amplificar ambos sumandos, para encontrar una común medida. En el segundo, busca establecer que la medida común, es el producto de los referentes de cada uno de los sumandos. El tercer ítem permite verificar que el algoritmo construido, es válido para todos los casos incluyendo fracciones no unitarias.

Al término de la sesión, la o el docente realiza preguntas tendientes a sistematizar el procedimiento extendido y, si es posible, a compararlos con los anteriormente conocidos. Se espera que los y las estudiantes, señalen que mediante la técnica de amplificar o simplificar una o ambas fracciones, buscan fracciones iguales a las originales, con un referente o unidad de medida en común. La relación con los algoritmos previos, variará según el o los algoritmos aprendidos inicialmente, pero en todos los casos se busca igualar los denominadores para expresar las fracciones por sumar o por restar, como otras iguales que utilizan una unidad de medida o referente en común.

7.4 Valoración de la Experiencia: ¿qué hemos aprendido?

La implementación de esta experiencia de aprendizaje, nos ha permitido identificar algunos aspectos muy relevantes, a la hora de pensar en la enseñanza del concepto de fracción y de los algoritmos aditivos asociados. En primer lugar, hemos podido apreciar que la aplicación de esta unidad didáctica, permitió a los estudiantes lograr reconceptualizar la fracción, como un objeto matemático que responde a la necesidad de cuantificar medidas o cantidades no enteras. Este hecho permite enfrentar de mejor manera, una serie de obstáculos epistémico-didácticos (Brousseau, 1983), que surgen con frecuencia en el trabajo de las fracciones en el campo aditivo. Según Brousseau, este tipo de obstáculos corresponde a concepciones que en principio han sido eficientes bajo determinados contextos matemáticos y didácticos, pero que en la evolución del aprendizaje, en los nuevos contextos, se vuelven inadecuados para lograr una significación potente de los conceptos trabajados. De aquí que es importante señalar que estos obstáculos no son una falta de conocimiento, sino que corresponden a un conocimiento en vías de perfeccionamiento. Y es por ello que para superar tales obstáculos, se precisan situaciones didácticas diseñadas específicamente, para hacer que los alumnos sean conscientes de la necesidad de cambiar sus concepciones, y así avanzar en el aprendizaje.

Entre los obstáculos que hemos detectado en la aplicación de esta secuencia de enseñanza, y que nos aportan luces para el mejoramiento de nuestra práctica docente, podemos mencionar los siguientes:

a) **¿Cómo puedo tener más partes que las que tiene el todo?** Una de las primeras dificultades que presentan los estudiantes es con la idea de parte-todo, en contexto en que las partes superan al todo. La existencia de fracciones mayores que un entero es un aspecto difícil de explicar, dado que la única funcionalidad conocida hasta el momento de las fracciones, es que permiten representar una parte de un todo. Las actividades aquí presentadas, permitieron conflictuar estas concepciones iniciales, e iniciar el trabajo de una conceptualización más robusta de las fracciones.

b) **Amplificar v/s agrandar, simplificar v/s achicar**. Hasta ahora, los estudiantes han tenido como gran referente el trabajo con números naturales, lo que provoca una gran dificultad cuando se desea comprender la fracción, como un solo objeto matemático. Los estudiantes suelen ver a la fracción como dos números separados, dándole a cada uno un significado distinto, muy asociado al modelo parte-todo: el numerador se relaciona con el número de partes consideradas y el denominador con el número de partes en las que se ha dividido el entero. Esta concepción relacionada al trabajo con naturales, dificulta la comprensión de que dos fracciones expresadas con

distintas cifras, puedan ser "iguales" (equivalentes), considerando que una utiliza "números" mayores o menores que la otra. Si consideramos además, el hecho de que dichas fracciones iguales pueden ser vistas como el producto de la multiplicación o división de numerador y denominador, por algún factor o divisor respectivamente, se conflictúa aún más la idea de la igualdad. Esto se relaciona y se explica porque en los números naturales, la multiplicación se asocia a una suma iterada, con lo cual el producto cuando ambos factores son distintos de uno, siempre es una cantidad mayor a cada uno de los factores por separado. Asimismo, la división se asocia con una resta iterada, de manera que el cociente, siempre es menor que el dividendo.

c) **¿Por qué debo igualar los denominadores para sumar o restar?** En los procesos algorítmicos aditivos habituales, se pone mucho énfasis en los denominadores, lo que refuerza la idea de mirar a las fracciones como un objeto escindido, como si numeradores y denominadores fuesen independientes entre sí. La experiencia desarrollada por los estudiantes propició que comprendiesen que, dado que una fracción se puede expresar de distintas formas (fracciones equivalentes), es posible expresar dos o más fracciones con distinta unidad de medida, es decir, como otras fracciones equivalentes con una medida en común. De esta manera, estas fracciones serían comparables y mensurables, y se podría expresar la suma o la resta de ellas, a través de una única expresión fraccionaria que utilice dicha medida común como referente. La construcción progresiva y fundamentada de este procedimiento, les permitió darle significado al algoritmo, desarrollando procesos de resignifcación potentes y contextualizados, en la secuencia de enseñanza planificada.

Por otra parte, y de modo más general, la experiencia incentivó la indagación, la formulación de ideas, la contrastación de hipótesis, y el establecimiento de conclusiones por parte de los y las estudiantes. Fue muy interesante observar cómo se iban superando los obstáculos antes mencionados, y cómo ello generaba confianza en los estudiantes, haciéndolos sentir capaces de aprender matemáticas. Invitamos a profesoras y profesores a probar esta secuencia y a seguir mejorándola, todo para optimizar la calidad del aprendizaje de nuestros estudiantes.

Referencias bibliográficas

Baturo, A. R. (2004). *Empowering Andrea to help year-5 students construct fraction understanding.* Artículo presentado en 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen.

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). Rational Number Concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 91-125). New York: Academic Press.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4*(2), 165-198.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des Mathématiques, 7*(2), 33-115.

Contreras, M. (2004). *La división de fracciones: un algoritmo misterioso.* Artículo presentado en VI Jornades d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana, Valencia.

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2005). *Revisiting a theoretical model on fractions: implications for teaching and research.* Artículo presentado en 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Melbourne.

Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica, del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Editorial Aique.

Espinoza, L., Barbé, J., & Gálvez, G. (2009). Estudio de fenómenos didácticos vinculados a la enseñanza de la aritmética, en la educación básica chilena. *Enseñanza de las Ciencias, 27*(2), 157-168.

Fandiño, M. (2005). *Le frazioni, aspetti concettuali e didattici.* Tesis Doctotal, Universidad de Bologna.

Flores, R. (2010). *Significados asociados a la noción de fracción en la escuela secundaria.* Tesis de maestría, Instituto Politécnico Nacional de México, México.

Gálvez, G. (1994). La didáctica de las matemáticas. En C. Parra y I. Saiz (Eds.), *Didáctica de las Matemáticas: aportes y reflexiones*. Buenos Aires: Paidós.

García, M., & Montiel, G. (2007). *Resignificando el concepto de función en una experiencia de educación a distancia.* Artículo presentado en I Encuentro Nacional sobre Enseñanza de la Matemática, Universidad Nacional del Centro, Argentina.

Jorba, J., & Sanmarti, N. (1996). *Enseñar, Aprender y Evaluar: Un proceso de Regulación Continua. Propuestas Didácticas para las áreas de Ciencias de la naturaleza y Matemáticas*. Madrid: Ministerio de Educación y Cultura.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. En R. Lesh (Ed.), *Number and Measurement: Papers from a Research Workshop* (pp. 101-144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge or rational numbers: Its intuitive and formal development. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 162-181). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)/Erlbaum.

Llinares, S., & Sánchez, M. V. (1997). *Fracciones* (Vol. 4). Madrid: Editorial Síntesis.

Newstead, K., & Murray, H. (1998). *Young students' constructions of fractions.* Artículo presentado en 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Stellenbosch, South Africa.

Suydam, M. N. (1979). Review of recent research related to the concepts of fractions and the ratio. *Critical reviews in mathematics education*.

Capítulo 8

Relaciones y cambios: Interpretación, representación y tratamiento de la Información

Horacio Solar

Índice del Capítulo

- *Resumen*
- *Justificación teórica: Un enfoque por competencias*
- *Selección de contenidos*
- *Secuencia de los contenidos*
  - *Secuencia 1: En busca de las variables*
  - *Secuencia 2: Interpretación de gráficas y tablas funcionales*
- *Reflexión sobre la aplicación de la Unidad Didáctica*
- *Referencias bibliográficas*

Resumen

La *interpretación de información* en el programa curricular chileno de matemáticas, se considera en segundo ciclo como uno de los ejes temáticos. En el programa de estudios de 8º básico, uno de los objetivos es: "Recolectar y analizar datos en situaciones del entorno local, regional y nacional y comunicar resultados, utilizando y fundamentando diversas formas de presentar la información, y los resultados del análisis de acuerdo a la situación".

La Unidad didáctica que presentamos «Relaciones y cambios: Interpretación, representación y tratamiento de la información», tiene como propósito enfocarse a unos de estos aspectos, desarrollar tareas sobre el tratamiento de la información en las que se utilicen gráficas y tablas, tanto funcionales como estadísticas, en un nivel de 8º básico

El objetivo de presentar y analizar información en medios de comunicación, tiene como fundamento identificar e interpretar los lenguajes en que se representan los datos, (gráficas, tablas numéricas y expresiones verbales), como a su vez, comprender el contexto de referencia de las situaciones en que se presentan.

Esta propuesta, parte de la base de que para considerar los elementos señalados, es necesario hacer un estudio de las variables que están presentes en los datos. Dichos datos se pueden representar en gráficas, tablas y expresiones verbales. Si existe una relación de dependencia entre las variables, estas representaciones se denominan «lenguajes funcionales». Por otro lado, si las variables no se relacionan funcionalmente, pero sí se pueden organizar los datos en una tabla o gráfica, se denominan «lenguajes estadísticos».

Se utiliza el término «lenguaje» en vez de «representación», para hacer referencia a las gráficas, tablas y expresiones verbales. Esta distinción lexicológica viene determinada porque consideramos que las gráficas y tablas son más que una representación, ya que a través de ellas nos comunicamos. Es por ello que se les otorga la calificación de «lenguajes».

Otro aspecto importante es que casi el total de las tareas se sitúan en un contexto real. Ello en coherencia con la naturaleza del trato de la información, proveniente íntegramente de un contexto extramatemático.

8.1 Justificación teórica: Un enfoque por competencias

El enfoque de **competencias** en la educación, es un marco que se ha expandido en Europa aplicándose originalmente al currículo de educación superior, a partir del acuerdo de Bologna, y en el caso de algunos países como España, el currículo tanto de Educación Primaria como Secundaria se ha adaptado en términos de competencia. En el área de Matemáticas, el currículo de España de secundaria plantea lo siguiente:

> *La competencia matemática consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral.*

Para esta propuesta, el currículo argumenta la necesidad en la Educación Secundaria de desarrollar competencias en la ciudadanía, en la interpretación cuantitativa y cualitativa de la información, por medio de los lenguajes gráficos y numéricos (tablas), y traducciones entre ellos y su expresión verbal:

> *Forma parte de la competencia matemática, la habilidad para interpretar y expresar con claridad y precisión informaciones, datos y argumentaciones, lo que aumenta la posibilidad real de seguir aprendiendo a lo largo de la vida, tanto en el ámbito escolar o académico como fuera de él, y favorece la participación efectiva en la vida social. (...)*
>
> *La toma de decisiones requiere comprender, modificar y producir mensajes de todo tipo, y en la información que se maneja cada vez aparecen con más frecuencia tablas, gráficos y fórmulas que demandan conocimientos matemáticos para su correcta interpretación. Por ello, los ciudadanos deben estar preparados para adaptarse con eficacia a los continuos cambios que se generan. (...)*
>
> *El estudio de las relaciones entre variables y su representación mediante tablas, gráficas y modelos matemáticos es de gran utilidad para describir, interpretar, predecir y explicar fenómenos diversos de tipo económico, social o natural. Los contenidos de este bloque, se mueven entre las distintas formas de representar una situación: verbal, numérica, geométrica o a través de una expresión literal, y las distintas formas de traducir una expresión de uno a otro lenguaje. Asimismo, se pretende que los estudiantes sean capaces de distinguir las características de determinados tipos de funciones, con objeto de modelizar situaciones reales.*

Otro punto por considerar, es rescatar el papel que tiene la estadística descriptiva, en el desarrollo de competencias de interpretación. Existe un consenso en que en los antiguos planes se concedía poca importancia a las tablas y gráficas. En cambio, gracias por una parte a: (1), la investigación en educación de las matemáticas que ha incentivado el desarrollo de las tablas y gráfica en la sala de clases, (2) al incentivo de las reformas curriculares, y lo más importante (3), el profesor que ha implementado en la sala un aprendizaje de las funciones, a través de la interpretación de gráficas y tablas. Reafirmando este enfoque, en esta propuesta «Relaciones y cambios: Interpretación, representación y tratamiento de la información», se promueve un estudio de las gráficas y tablas, que realce su relación al tratamiento de datos y el manejo de la información.

8.2 Selección de contenidos

Actualmente, se vive un cambio en la orientación curricular de las áreas, con especial importancia en las Ciencias y Matemática. Un ejemplo, es la aparición de nuevos modelos didácticos que pretenden remplazar a la estructura de Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios, presente en nuestro currículo chileno. Nuestra propuesta se enmarca en esta orientación, por lo tanto, para seleccionar los contenidos, se describen los aprendizajes en términos de competencias, que se esperan desarrollar en los estudiantes:

8.2.1 Competencias matemáticas:

- Reconocer y aislar a las variables que permitan estudiar una situación.
- Interpretar gráficas, tablas y expresiones verbales, en los que exista una relación de dependencia entre variables, en diferentes contextos.
- Identificar información de medios de comunicación en los cuales se interpreten gráficas, tablas y expresiones verbales.
- Redactar una noticia utilizando información de tablas y gráficas.

Como decíamos, en esta propuesta conjugan nociones de *Relaciones y Cambios* y de *Tratamiento de la información.* En la tabla siguiente se describen los objetivos de la unidad según estos términos[17].

17 Además, contribuyendo a esta clasificación, en el currículo de matemáticas de España, se ha reemplazado el término de *Funciones por Relaciones y Cambio*.

OBJETIVOS DE LA UNIDAD	
Relaciones y cambios	**Tratamiento de la información**
• Descripción local y global de fenómenos presentados de forma gráfica. • Identificación de variables en situaciones en que las variables no estén necesariamente aisladas. • En situaciones diversas, establecer la existencia o no de relaciones entre variables. • Representar gráficamente diversas relaciones entre dos variables. • Representación gráfica de una situación que viene dada a partir de una tabla de valores, de un enunciado o de una expresión algebraica sencilla. • Identificación y descripción de situaciones con tasas de cambio constante o variable, y comparación entre ellas. • Interpretación de las gráficas como relación entre dos magnitudes. Observación y experimentación en casos prácticos. • Interpretación puntual y global de informaciones presentadas en una tabla o gráfica. • Pasar progresivamente de una interpretación cuantitativa a una cualitativa de gráficas que expresen relaciones de cambio.	• Reconocimiento y valoración de las Matemáticas para interpretar y describir situaciones inciertas. • Diferentes formas de recogida de información. Organización de los datos en tablas. • Elaboración justificada de conclusiones y predicciones basadas en los datos.

8.3 Secuencia de los contenidos

Las orientaciones para el profesorado de cada secuencia, han sido desarrolladas con el objetivo de introducir en el tema a los docentes que no estuviesen familiarizados con este tipo de actividades, por lo que, a priori, incluyen más información de la que se pretende trabajar con los estudiantes. Pensamos que de este modo, la versatilidad del material es mucho mayor y las posibilidades de trabajo en el aula permitirán adaptarse a la diversidad de cada situación.

Después de estas orientaciones se presenta el material para el alumnado. En cada actividad es el profesor quien debe decidir cómo gestionar el material, si debe

llevarse a cabo de forma individual o en grupo.; con esto aprovechamos para recordar que uno de los objetivos de la unidad, es que el profesor se apropie de ésta, y más allá de servir de material de apoyo en el aula, también pueda utilizarlo como modelo o referencia para que luego él mismo, pueda desarrollar unidades didácticas.

En la tabla siguiente se presentan las dos secuencias que componen la unidad, las tareas matemáticas y la distribución temporal, en un curso de 8º básico.

Secuencia 1: En búsqueda de las variables	**Secuencia 2: Interpretación de gráficas y tablas funcionales**
Tareas matemáticas	
• Identificación de variables en descripciones verbales y gráficas cualitativas. *Problema 1-5.* • Atribuir significado a las variables a partir de dibujos. *Problema 6.* • Interpretación del significado de las variables en la cuentas. *Problema 7.*	• Interpretación cuantitativa y cualitativa de los lenguajes funcionales. *Problema 1-7.* • Interpretación de lenguajes funcionales en medios de comunicación. *Problema 8.*
4 horas pedagógicas	**4 horas pedagógicas**

8.3.1 Secuencia 1: En busca de las variables

DESARROLLO DE LA UNIDAD

En la etapa de Educación Secundaria, se estudian conceptos de la actividad matemática tales como: los números, el álgebra, la geometría, las funciones, la estadística y la probabilidad. Por otra parte, también hay procesos que se aplican transversalmente a cada una de estos conceptos: la argumentación, la resolución de problemas, la visualización y la interpretación de datos, por mencionar algunos. Y tanto en los conceptos como en sus procesos, se construyen lenguajes para su desarrollo: gráfico, algebraico, numérico, verbal, geométrico, etc. En esta configuración hay elementos que están presentes en la actividad matemática, que no se estudian de una manera tan explícita, o a los que no se les concede tanta importancia; algunos de ellos son:

- La interpretación de gráficas, tanto funcionales como estadísticas.
- Estudio de procesos de modelización.
- Manipulación de variables.

La **manipulación de variables** será objeto de estudio de esta Secuencia.

La relevancia que se le atribuye a las variables en esta propuesta, se justifica por tres razones; en primer lugar, por el uso que tiene en situaciones cotidianas tales como las facturas que llegan a casa (gas, luz, teléfono), donde se puede observar que, por medio de dos o tres variables, se construyen modelos que permiten manipular los datos. En segundo lugar, por el estudio de las relaciones y cambios, donde la interpretación de variables es esencial para atribuirle significado. Y en tercer lugar, por la lectura, interpretación y construcción de gráficas y tablas, tarea que requiere que previamente se atribuya un significado a las variables subyacentes.

En consecuencia, en esta Secuencia se pretende que los estudiantes desarrollen las siguientes competencias:

- Reconocer y aislar las variables que permitan estudiar una situación.
- Interpretar gráficas, tablas y expresiones verbales, en las que exista una relación de dependencia entre variables, en diferentes contextos.

Estas competencias se desarrollan a través de siete problemas que permiten encadenar los siguientes procesos:

- Identificar las variables en expresiones verbales y en gráficas.
- Atribuirle significado a las variables desde las gráficas y dibujos.
- Negociar el significado de las variables para tener un criterio cuantitativo en la toma de decisiones relativas, por ejemplo, a las cuentas del hogar.

Orientación para el profesorado:

En esta actividad se trabajarán siete problemas (pág. 230).

El *Problema 1*, **«Llamadas telefónicas»**, extraído del libro *El lenguaje de funciones y gráficas,* (Shell Centre for Mathematical Education*, 1990)*; propuesta didáctica que se ha utilizado ampliamente para estudiar la interpretación de gráficas. Sin embargo, en esta ocasión se le ha dado otro sentido al problema, priorizando la tarea de identificar y estudiar las variables.

En el *Problema 2*: **«Encuentra la variable»**. Se profundiza en el estudio de éstas a través de la identificación de las variables subyacentes en diferentes situaciones, para luego interpretar la situación en el lenguaje gráfico. Así, en primer lugar, se tiene que elegir qué variables corresponden a cada situación, para decidir seguidamente cuál es la gráfica que mejor representa cada situación.

El *Problema 3:* **«¿Cuál es la variable de... ?»**, tiene el mismo propósito que el problema anterior, pero con la diferencia de que se pide directamente, traducir de una situación verbal a un gráfico.

El *Problema 4:* **«Explica qué pasa»**, tiene como propósito que los estudiantes describan una situación. El ejemplo es propuesto para guiar a los estudiantes, pues de lo contrario no es fácil que comprendan la tarea pedida.

Observen que los problemas 1 y 2 se asocian a gráficos lineales que supone un modelo de proporcionalidad directa. Es de suponer que los estudiantes tienen nociones del curso anterior, en que se trató la proporcionalidad con tablas numéricas, por lo tanto, es pertinente recordar a los alumnos la noción de proporcionalidad. En cambio, el problema 3 es más complejo de interpretar; una estrategia para dar las explicaciones de la gráfica se basa en la relación entre las variables, cómo varía una respecto a la otra.

En el *Problema 5:* **«Inventa una historia»**. Se propone al alumnado que elabore una historia, con el objetivo de realizar la tarea inversa a la primera actividad. En el desarrollo de la actividad, es probable que se observen elaboraciones muy diversas: desde descripciones muy simples hasta incluso verdaderas historias. Se recomienda que en la discusión de aula, el docente negocie con los estudiantes un nivel de interpretación aceptable y, en consecuencia, unas redacciones coherentes y ricas en lenguaje.

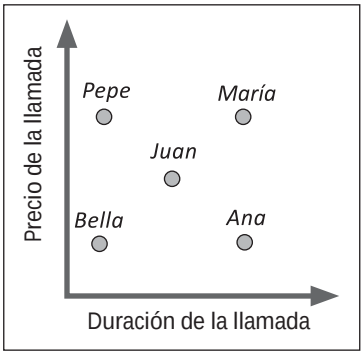
El *Problema 6:* **«En búsqueda de las variables»**, consiste en interpretar los dibujos para obtener las variables subyacentes a la situación. Estas actividades han sido utilizadas ampliamente desde los noventa, a partir del libro *El lenguaje de funciones y gráficas,* para realizar la tarea de trazar la gráfica de las situaciones dibujadas. Sin embargo, en esta propuesta se estudian previamente las variables que inciden en la gráfica, para luego, en la Secuencia 2, desarrollar la tarea de elaborar la gráfica de un dibujo.

El *Problema 7:* **«¿Qué plan elegir?»**. La tarea consiste en extraer e interpretar las variables de una situación. En esta actividad, se propone al alumnado que elija entre tres planes de comunicación en el hogar. El nivel de complejidad es alto, ya que no existe una única estrategia de resolución; por ello sugerimos que se desarrolle en grupo. Además, el objetivo no es tanto que realicen una elección determinada, sino más bien que se basen en argumentos cuantitativos coherentes para tomar una decisión. En la pregunta « ¿Qué plan elegirían ustedes?», se debe fomentar la participación de los estudiantes en el aula.

ACTIVIDADES

PROBLEMA 1
Llamadas Telefónicas

Un fin de semana, cinco personas hicieron llamadas telefónicas a varias partes del país. Anotaron el coste de sus llamadas y el tiempo que estuvieron en el teléfono en la siguiente gráfica.



Responde razonadamente las siguientes cuestiones:

a. ¿Qué variables se están relacionando?

b. ¿Quién pagó más por la llamada?

c. ¿Quién pagó menos por la llamada?

d. ¿Quién habló durante más tiempo?

e. ¿Quién realizó una llamada local?

f. ¿Quiénes realizaron llamadas aproximadamente a la misma distancia?

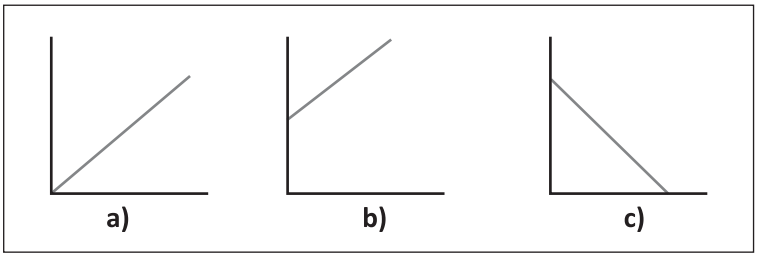
g. Si cambiamos la variable representada en la abscisa «duración de la llamada», por la variable «distancia de la llamada», ¿Tiene sentido esta gráfica? ¿Cómo la interpretarías?

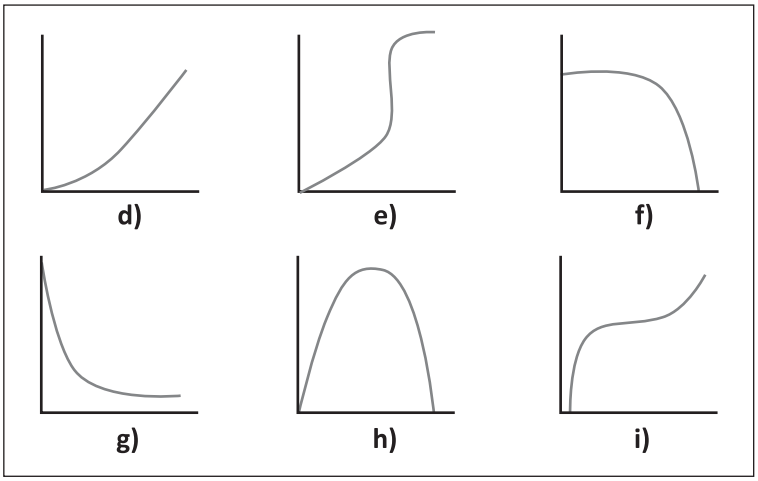
PROBLEMA 2
Encuentra la Variable

A. De las cinco situaciones descritas, escribe en el espacio las variables que les corresponda. **A cada situación le corresponden dos variables.**

Situaciones	Variables
1. El levantador mantuvo las pesas sobre su cabeza por unos segundos y luego las dejó caer con un violento estrépito.	Altura Tiempo
2. El auto alcanzó una velocidad de 100 Km./h en 8 segundos.	Velocidad Tiempo
3. Si el trabajo en la escuela es demasiado fácil, no aprendes nada con ello. Por otra parte, si es tan difícil que no lo puedes entender, tampoco aprendes. Por eso es tan importante trabajar con el nivel adecuado de dificultad.	Dificultad Aprendizaje
4. Desde tierra el águila emprendió vuelo hasta llegar a 100 m. para buscar a una presa, y en vista de que no vio nada apetecible subió a lo alto de la montaña al nido a descansar.	Altura Tiempo
5. Debido a la ausencia de tiburones, hay una abundante provisión de peces en la zona.	Cantidad Cantidad

B. Elige entre las nueve gráficas las que mejor describan cada una de las situaciones anteriores. **Etiqueta los ejes con las variables.**





Las gráficas más coherentes son:

- 1 → f)
- 2 → a)
- 3 → h)
- 4 → i)
- 5 → g)

PROBLEMA 3
¿Cuál es la Variable de...?

Instrucciones:

- Indica qué gráfica describe mejor cada una de las cinco situaciones que están descritas.
- Establece cuáles son las variables descritas en cada situación y sitúalas en los ejes.
- Si no encuentras la gráfica que quieres, dibuja tu propia versión.

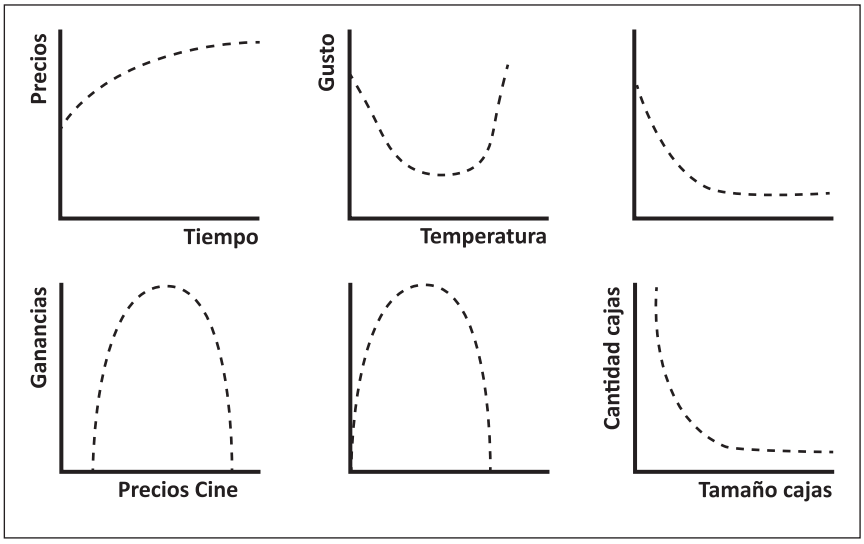
1. Los precios están subiendo más despacio que en ningún otro momento, de los últimos cinco años.

2. Me gusta bastante la leche fría y la leche caliente, pero, ¡detesto la leche templada!

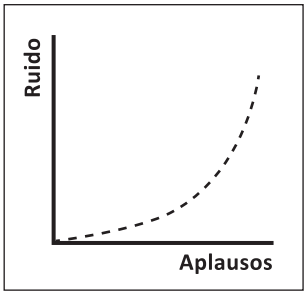
3. Cuánto más pequeñas son las cajas, más podemos cargar en la camioneta.

4. Después del concierto hubo un silencio abrumador. Entonces, una persona de la audiencia empezó a aplaudir. Gradualmente los que estaban alrededor se les unieron, y pronto todo el mundo estaba aplaudiendo y vitoreando.

5. Si las entradas del cine son muy baratas, los dueños no ganan tanto dinero. Pero si son demasiado caras, irá poca gente y también perderán. Por lo tanto, un cine debe cobrar un precio moderado para obtener beneficio.



La situación cuatro no se encuentra en las alternativas, su gráfica es.



PROBLEMA 4
Explica Qué Pasa

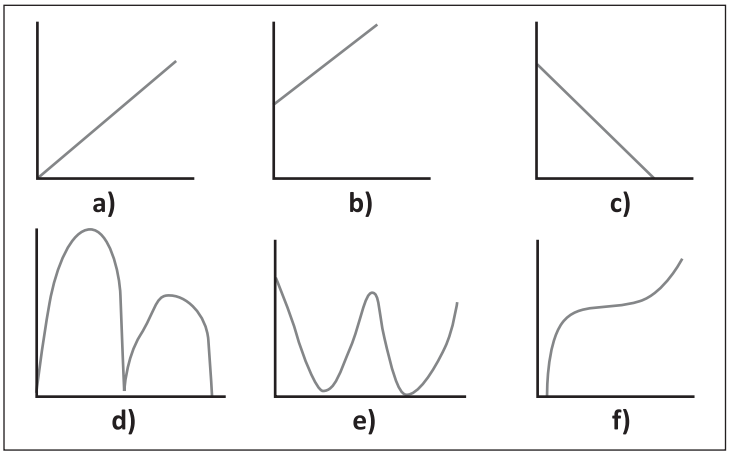
Instrucciones:

- En las siguientes tres situaciones, en no menos de dos líneas, decide y explica claramente lo que pasa. Guíate por el siguiente ejemplo:

> **EJEMPLO**
>
> ¿Cómo depende el precio de una bolsa de papas de su peso?
>
> ***Mientras más pesa la bolsa, más alto es el precio.***

1. ¿Cómo depende la duración de una carrera, de la longitud de la pista?
2. ¿Cómo varía el volumen de un globo cuando sale aire lentamente de él?
3. ¿Cómo varía la velocidad de una niña en un columpio?

- Elige entre las gráficas la mejor que se adapte a cada situación.
- **Establece cuáles son las variables descritas** en cada situación y sitúalas en los ejes.

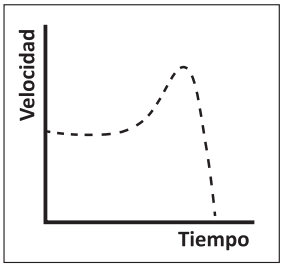


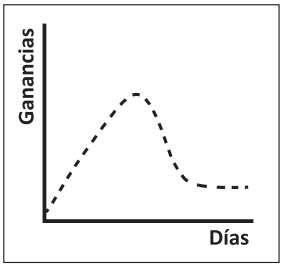
Los gráficos que corresponden a cada situación son:

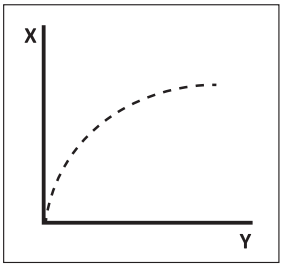
- 1→ a)
- 2→ c)
- 3→ e)

PROBLEMA 5
¡Inventa una Historia!

1) Inventa tres historias con estas variables y gráficos. A las variables *X* e *Y* puedes atribuirle el significado que tú quieras.







PROBLEMA 6
En Búsqueda de Variables

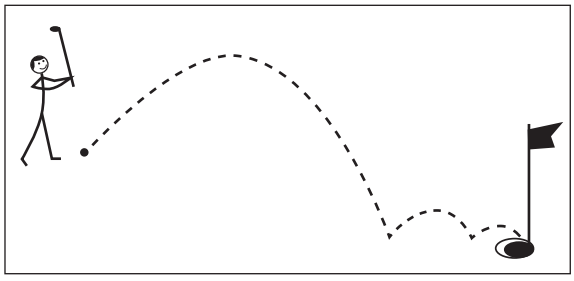
En las siguientes situaciones, indica distintas variables que permiten describir el fenómeno

a) El recorrido de una bola de golf: _____

_____

_____

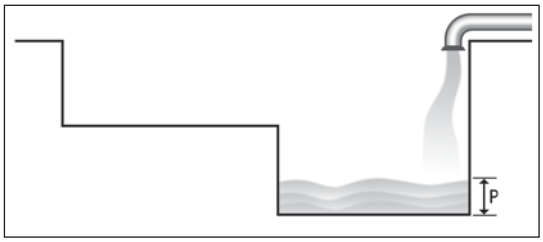
_____



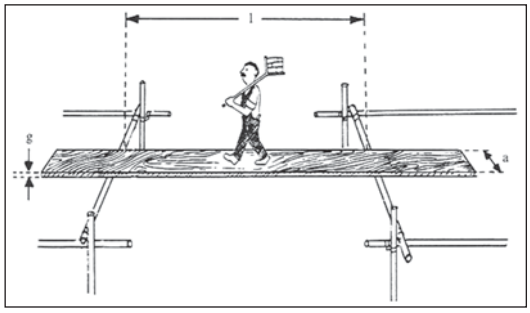
b) El llenado de una piscina: _____

_____

_____



c) Al cruzar una paleta, la rotura de un puente elaborado con un tablón:



PROBLEMA 7
¿Qué Plan Elegir?

Tomás con su familia, quieren elegir un plan *trío,* (teléfono, banda ancha Internet y TV cable), luego de informarse, se quedan con seis planes distintos de tres compañías de telefonía.

	Telefónica		**VTR**		**Manquehue**	
	Plan 1	Plan 2	Plan 1	Plan 2	Plan 1	Plan 2
Minutos gratis llamada local	350	650	350	350	400	700
Velocidad navegación (Kbps)	300	600	300	600	450	650
TV cable	Si		Si		Si	
Costo mensual	**$ 40.990**	**$ 45.990**	**$ 33.900**	**$ 46.900**	**$ 35.990**	**$ 39.990**

1. Identifica cuáles son las variables más relevantes para tomar la decisión de cual plan elegir. ¿Son las mismas variables para cada compañía?

_____

_____

2. Elige el plan que creas el más conveniente en cada una de las siguientes condiciones.

   a. La familia de Tomás pasa un buen tiempo hablando por teléfono:

   _____

   b. Tomás y su hermano quieren velocidad al navegar:

   _____

   c. El más económico con televisión:

   _____

   d. Un plan con la mejor navegación y televisión:

   _____

3. Hay variables que no incidan en la decisión? ¿Cuáles?

_____

4. ¿Hay variables que inciden en la decisión y no están reflejadas en la tabla? Si es así indiquen cuáles son.

_____

_____

5. ¿Qué plan elegirían ustedes? Explica por qué.

_____

_____

_____

8.3.2 Secuencia 2. Interpretación de gráficas y tablas funcionales

DESARROLLO DE LA UNIDAD

En la Secuencia 2, las actividades propuestas han sido reunidas y elaboradas con el propósito de potenciar la interpretación de lenguaje funcional o, usando la terminología de nuestro marco educativo, potenciar competencias matemáticas sobre la interpretación de lenguajes funcionales en los estudiantes.

A diferencia de la Secuencia anterior, que está dirigida principalmente al alumno, la Secuencia 2 tiene, además, el propósito de mostrar al profesor una clasificación de tareas de interpretación, sobre tres **lenguajes de funciones** (LF): gráfico, numérico y expresión verbal. La estrategia de clasificación, ha sido desarrollada en el campo de la investigación en educación matemática, (Solar, 2006), e ideada con el objetivo de aplicarla en la innovación, es decir, en la clase de Matemáticas.

Las descripciones y los términos que se utilizan en la orientación para el docente, son más complejas en comparación a las anteriores, por lo tanto, se pide un esfuerzo en la lectura con el fin de poder identificar actividades de interpretación de LF, y situarlas bajo una clasificación determinada. De igual modo, también se invita al profesor a rehacer estas clasificaciones, y que el mismo pueda elaborar o reunir actividades en base a una caracterización que le resulte cómoda, y que le permita evaluar las competencias que se pretende potenciar.

Las competencias que se pretende desarrollar en los estudiantes son:

- Interpretar gráficas, tablas y expresiones verbales, en los que exista una relación de dependencia entre variables, en diferentes contextos.
- Identificar información de medios de comunicación, en los cuales se interpreten gráficas, tablas y expresiones verbales.
- Redactar una noticia utilizando información de tablas y gráficas.

Estas competencias se desarrollan a través de ocho problemas que permiten encadenar en las siguientes tareas:

1. Interpretar cuantitativamente una gráfica y una tabla.
2. Interpretar cualitativamente una gráfica.
3. Interpretar un dibujo y elaborar una gráfica
4. Describir, oral o de forma escrita, la interpretación de una gráfica o tabla.
5. Analizar una noticia cuya información está en descripción verbal y gráfica.

Las primeras tres tareas, pueden encontrarse en cualquier libro de texto que trabaje el lenguaje gráfico de funciones. Sin embargo, existe una serie de tareas de interpretación que no son fáciles de encontrar en materiales curriculares, y son las que están ligadas a la interpretación de medios de comunicación, que provienen de periódicos, revistas o tablas para entregar información a un público, que no necesariamente es escolar. La cuarta tarea, plasmada en el último problema, evoca este la tipo de tareas.

Orientaciones para el profesorado:

Los problemas 1 hasta el 7 se corresponden con tareas de interpretación cuantitativa («más alto que », «el peso es tanto») y cualitativa (dotar de un significado de cualidad a los LF). Generalmente, en este tipo de tareas, se relacionan dos o más lenguajes, o bien existe una traducción entre lenguajes (por ejemplo, de una expresión verbal a una gráfica).

Los problemas 1 y 2 corresponden a tareas de interpretación cuantitativa, y son aquellas en las que la interpretación es numérica, y no se observa necesariamente una relación entre las variables. Generalmente corresponden a tareas de interpretar una tabla o una gráfica con escalas.

Para desarrollar el *Problema 1:* **«¿Qué pesa más?»**, contamos con variables extramatemáticas (peso y altura). Nótese que en las dos primeras opciones, se interpreta de manera local el gráfico, es decir, se focaliza en un sector de la gráfica; en cambio, en la pregunta c), se necesita focalizar de manera global la gráfica.

Problema 2: **«El parking»,** comienza con la traducción de una tabla a una gráfica, cuya interpretación es cuantitativa; por otra parte, es necesario focalizar de manera global a la gráfica, para determinar la función.

A partir del problema 3, se desarrollan actividades de interpretación cualitativa; eso significa que en la interpretación, se tiene en cuenta la relación entre las variables (Leinhardt *et al.*, 1990). En las tareas de interpretación cualitativa, predomina la traducción del gráfico al lenguaje verbal y viceversa. A su vez, también existen ejemplos de traslaciones entre gráficas, tablas y fórmulas que pueden ser considerados con intencionalidad cualitativa.

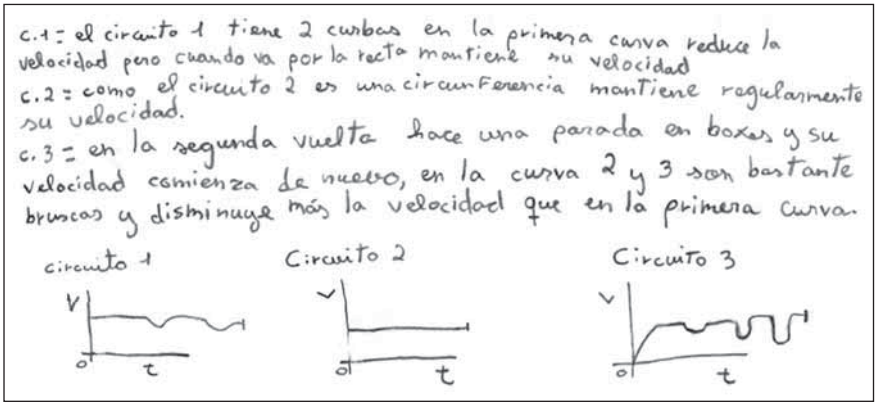
En otras propuestas didácticas, la diferencia entre interpretación cuantitativa y cualitativa, se establece en función de si la gráfica está cuantificada o no. Es decir, el criterio de calificar la interpretación, se basa en la naturaleza de la representación. En cambio, en nuestra propuesta, la interpretación se manifiesta en las tareas que se deben llevar a cabo en cada uno de los problemas; con este cambio de enfoque, se puede dar el caso de que en una gráfica cuantificada se realice una interpretación cualitativa, pues eso depende de si hay relación entre variables, y si

se le atribuye en las tareas un significado cualitativo a la gráfica.

El *Problema 3:* **«Montaña rusa»**, corresponde a una clasificación de tareas de interpretación que fue ampliamente estudiada por Janvier, en su tesis doctoral (1978). Desde los años noventa, los libros de texto y las propuestas curriculares, ponen énfasis en este tipo de problemas, aludiendo a una interpretación cualitativa y con variables de naturaleza física. El caso de la "montaña rusa", se ha puesto como ejemplo de este tipo de tarea; más aun, el profesorado podrá encontrar varios problemas similares en otras propuestas curriculares, por ejemplo en la obra *El lenguaje de funciones y gráficas*.

El *Problema 4:* **«*El auto de carrera*»**, se ha extraído de esta misma obra. Es un clásico ejemplo de una tarea de interpretación de enunciados por medio de una gráfica, con variables de carácter físico (tiempo y velocidad), y focalización global. Este problema ha tenido bastante éxito en varias propuestas curriculares, e incluso se adaptó para su aplicación en Pisa 2002.

A continuación, se muestra una respuesta al problema, en el que también se pedía una traducción al lenguaje gráfico y a expresión verbal, de un estudiante con un nivel de segundo ciclo de básica. Es interesante observar que este tipo de tareas, basadas en un referente real, amplía la concepción de respuestas aceptadas. Por ejemplo, en el caso del circuito 3, no se ha realizado una traducción correcta del gráfico, ya que la velocidad inicial no es nula, pero la descripción verbal del estudiante es coherente con el gráfico: "En la segunda vuelta hace una parada en boxes". El contexto real da cabida a respuestas no esperadas, y que pueden ser consideradas como una interpretación coherente.



El *Problema 5:* **«Temperatura de un enfermo»**, los estudiantes deberán realizar tareas que impliquen tanto una interpretación cuantitativa como cualitativa; en este tipo de tarea las preguntas comienzan con una interpretación de naturaleza cuantitativa, para ir progresando hacia una interpretación cualitativa. Concretamente, se empieza con preguntas de interpretación cuantitativa y local –de la a) hasta la g)–, para ir pasando a una interpretación cualitativa y global –pregunta h).

El *Problema 6:* **«Consumo de alcohol»**, relativo al consumo de alcohol, una de las tareas que se pide es una descripción de la gráfica; con ello se potencia la cuarta tarea de la secuencia, interpretación escrita de un LF.

En el *Problema 7:* **«Rellenando una piscina»**, la descripción verbal proviene de una esquema pictórico, lo que podría dificultar una interpretación en la que se manifieste la relación funcional, es decir, que surjan descripciones tales como: aumento constante de la primera parte del llenado y/o, afirmar que (p) aumenta más lenta y regularmente en la segunda parte del llenado.

La realización de la gráfica, generalmente resulta complicada para los estudiantes; se aconseja que, en un primer momento, se realice individualmente, y que luego, se reúnan en parejas para comparar y reelaborar sus gráficas. Finalmente, deberían describir verbalmente la gráfica elaborada.

De igual modo, en el *Problema 8:* **«Camping»**, se pide al alumnado que realice tareas similares a las del problema anterior.

El *Problema 9* **«Accidentes automovilísticos»**, es extraído del periódico gratuito *Qué*[18](24 Mayo de 2005); trata la dependencia entre la velocidad y la cantidad de accidentes (heridos y muertes). Se observan varias tareas de interpretación. La pregunta a), se corresponde con una lectura e interpretación cuantitativa local; en la pregunta b), la interpretación es global; y posteriormente, en la pregunta c), deben realizar un comentario crítico, puesto que la noticia no interpreta correctamente el gráfico. Esta tarea refuerza las competencias comunicativas de los estudiantes.

18 Diario de distribución en Barcelona, España.

ACTIVIDADES

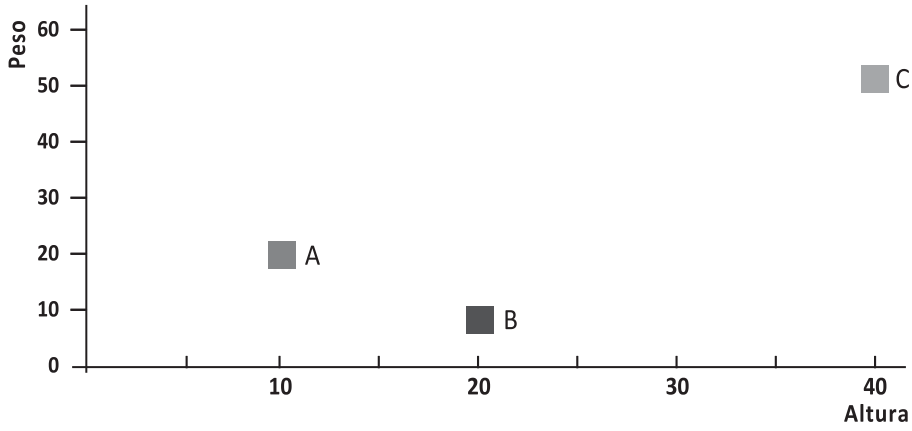
PROBLEMA 1
¿Qué Pesa Más?

A partir del gráfico siguiente escribe, si las afirmaciones siguientes son ciertas:

a) B pesa más que C.

b) A es más pequeña que C.

c) B es el más pequeño y el menos pesado.

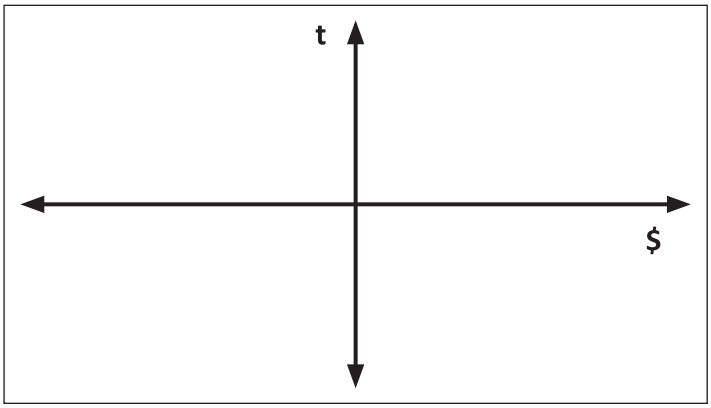


PROBLEMA 2
El Parking

Julia y sus amigas suelen ir a esquiar. Antes de subir a las pistas de esquí, dejan el coche en un parking al lado de la carretera. El parking vale 3 euros al día, independientemente del número de horas que se deje el coche. Podemos entonces elaborar la tabla siguiente:

t (horas)	0	1	2	3	4	5
Costo ($)	3	3	3	3	3	3

a) A continuación, representa gráficamente la tabla anterior.



- ¿Qué observas?

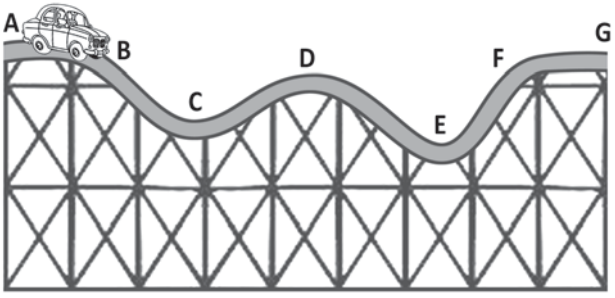
b) ¿Qué fórmula te parece que puede corresponder a esta función?

c) ¿Cuál es la pendiente de esta función? ¿Y la ordenada en el origen?

PROBLEMA 3:
MONTAÑA RUSA

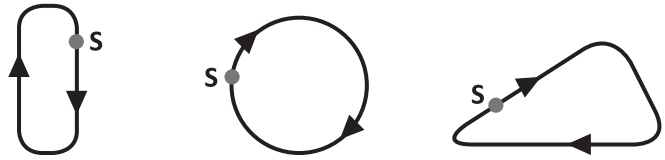
El dibujo muestra la pista de una montaña rusa, en la que los coches viajan entre A y G.

a) ¿Cómo varía la velocidad de estos coches cuando van de A a G? Explica tu respuesta por escrito y mediante una gráfica.



PROBLEMA 4
El Auto de Carreras

a) ¿Cómo crees que varía la velocidad de un auto de carreras, cuando está dando la segunda vuelta en cada uno de los tres circuitos dibujados.
(**S** = punto de partida).

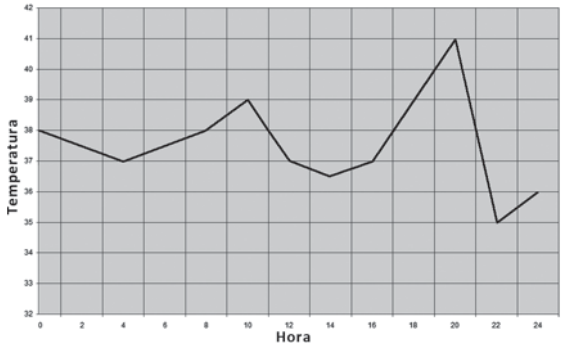


Circuito 1 Circuito 2 Circuito 3

b) Redacta una respuesta y elabora una gráfica para cada uno de los casos. Indica claramente las suposiciones que realices.

PROBLEMA 5
Temperatura de un Enfermo

El gráfico siguiente representa la variación de temperatura que ha sufrido un enfermo durante todo el día:



a) ¿Qué magnitud está representada en el eje de las abscisas?

b) ¿Qué magnitud está representada en el eje de las ordenadas?

c) ¿Qué temperatura tiene a las 10 de la mañana?

d) ¿A qué hora el enfermo tiene 41°C?

e) ¿Qué temperatura tiene a las 10 de la noche?

f) ¿A qué hora tiene 37°C?

g) Dos veces al enfermo se le suministra un antitérmico de efecto rápido. ¿A qué hora?

h) Haz un comentario de la situación general del enfermo que se pueda deducir del gráfico.

PROBLEMA 6
Consumo de Alcohol

A partir de los datos sobre el consumo de bebidas alcohólicas, y la concentración de alcohol en la sangre, podemos elaborar la tabla siguiente, obtenida una hora después de haber consumido tres vasos de cerveza. Recuerda que la ley no permite conducir a partir de una concentración de 0,8 g/l de alcohol en la sangre.

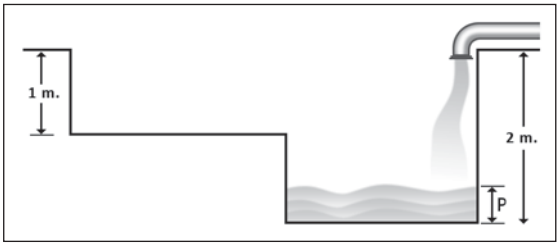
Peso en kg	**45**	**50**	**55**	**60**	**65**	**70**	**75**	**80**	**85**	**90**	**95**
Concentración de alcohol en hombres		1,1	1	0,9	0,8	0,75	0,7	0,65	0,6	0,5	0,5
Concentración de alcohol en mujeres	1,4	1,3	1,2	1,1	1	0,9	0,8				

a) Elabora un gráfico en un mismo sistema de ejes cartesianos, para comparar las diferencias de concentraciones entre los hombres y las mujeres. Gradúa el eje de las ordenadas de manera que la separación entre marcas represente 5 kg., y que la primera marca, la correspondiente a 45 kg, esté más cerca del origen de las coordenadas (0, 0), de lo que le correspondería por su valor.

b) Comenta el gráfico que has obtenido.

PROBLEMA 7
Rellenando una Piscina

• Se está rellenando una piscina rectangular con una manguera que vierte agua a una velocidad constante. A continuación se muestra una sección transversal de la piscina.



Contesta las preguntas:

a) Cuáles son las variables asociadas a la situación.

_____

_____

b) Cómo varía la profundidad del agua, con el tiempo en el extremo más profundo de la piscina.

_____

_____

c) Haz una gráfica que muestre como varía la profundidad del agua, con el tiempo en el extremo más profundo de la piscina. a partir del momento en que la piscina vacía comienza a ser rellenada

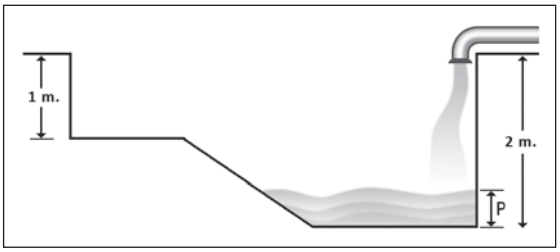
d) Describe con palabras, cómo varia con el tiempo la profundidad del agua en el extremo más profundo de la piscina, a partir del momento en que comienza a rellenarse la piscina vacía.

_____

_____

_____

• Una piscina rectangular diferente se rellena de una forma similar, vierte agua a una velocidad constante.



a) ¿Cómo varía la profundidad del agua con el tiempo, en el extremo más profundo de la piscina?

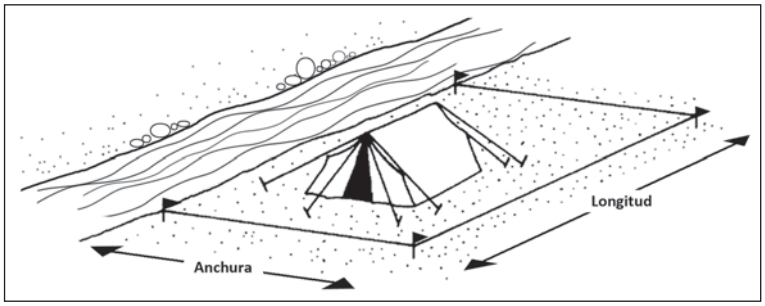
b) Haz una gráfica que muestre como varía la profundidad (p) del agua con el tiempo en el extremo más profundo de la piscina, a partir del momento en que la piscina vacía comienza a ser rellenada.

c) ¿Qué piscina tarda más tiempo en llenarse? Justifica tu respuesta.

PROBLEMA 8
Camping

A su llegada a un camping, a un grupo de campistas les dan una cuerda de 50 metros de largo y cuatro estacas, con las cuales deben marcar un recinto rectangular para su tienda.

Deciden colocar la tienda junto a un río, tal como se muestra en la ilustración. Esto supone que la cuerda sólo se tiene que usar para tres lados del recinto.



a) Si deciden hacer un recinto con una anchura de 10 metros. ¿Cuál será su longitud?

_____

_____

b) Describe con palabras, lo más completamente posible, cómo cambia la longitud del recinto cuando la anchura toma todos los valores posibles. (Considera valores grandes y pequeños de la anchura).

_____

_____

c) Encuentra el área encerrada por el recinto para una anchura de 10 metros, luego calcula el área para 5 metros, 15 metros y otras anchuras que estimes conveniente.

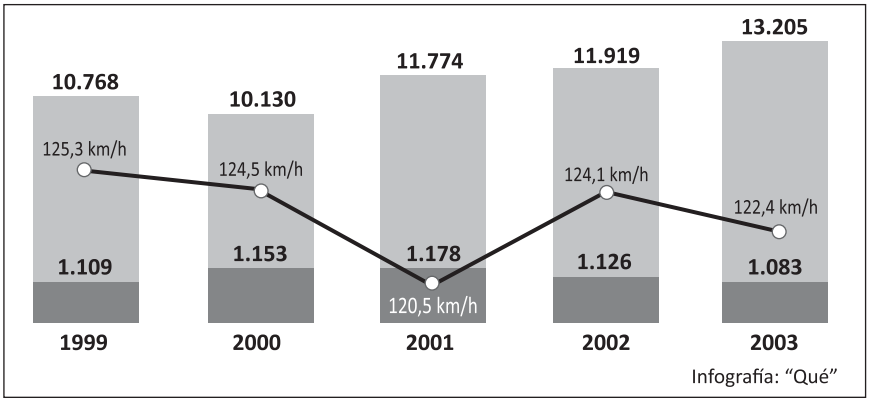
_____

_____

d) Dibuja una gráfica aproximada para mostrar cómo varía el área encerrada, cuando la anchura va tomando valores posibles. (Considera valores grandes y pequeños de la anchura).

PROBLEMA 9
Accidente Automovilístico

El gráfico muestra la velocidad promedio de un auto, en el momento que tiene un accidente.



Lee el gráfico y discute con tu compañero:

a) ¿Qué año hay más número de accidentes?

_____

b) ¿En qué año es más alta la velocidad promedio de un auto en el momento que tiene un accidente?

_____

c) ¿Qué año hay más número de muertos?

_____

d) Discute si hay una dependencia entre la velocidad y el número de accidentes. Y entre la velocidad con el número de muertos.

El siguiente párrafo fue extraído de una noticia real de un periódico, la cual tenía anexado el gráfico de arriba. Haz un comentario sobre la interpretación que se hace del gráfico en la noticia. ¿Estás de acuerdo?

La velocidad indebida es más peligrosa que la excesiva

Como se muestra en el gráfico "a menos velocidad, más accidentes". Y tal como afirma automovilistas Europeos Asociados (AEA), el peligro de la carretera reside en realidad en la velocidad inadecuada que mantienen los vehículos. Para Mario Arnaldo, presidente de esta asociación: "es tan peligroso ir muy deprisa como viajar excesivamente lento. Por este hecho, los radares no son la solución real a los problemas de los accidentes". Esta apreciación ha sido defendida por la asociación, ya que se ha probado que ha bajado la velocidad media de los conductores. No así los accidentes.

8.4 Reflexión sobre la aplicación de la Unidad Didáctica

Las diferentes propuestas que se presentan en esa recopilación, básicamente tienen un espíritu de que sean un aporte a las prácticas educativas de los docentes. En esta unidad en particular, esperamos que los profesores puedan apropiarse del marco de competencias matemáticas, con que se ha diseñado. En este sentido, no es casual que eligiéramos el tratamiento de la información como eje transversal, puesto que las tareas matemáticas de atribuir significado a las variables, e interpretar gráficas y tablas en diferentes ámbitos, están en línea con la noción de competencias que se enmarca en esta propuesta.

A su vez, se espera que los profesores reconozcan que hay diseño de la unidad, plasmándose en unas actividades que siguen una estructura determinada. Además, que se apropie de la Unidad, es decir que pueda adaptar los elementos didácticos desarrollados, y las mismas actividades a la realidad de su sala de clases.

Ligando con esta idea, invitamos a los docentes a que esta propuesta didáctica, junto con las otras del libro, sirva como apoyo para reflexionar sobre su propia práctica, haciéndose preguntas como: ¿las actividades desarrolladas las conocía? ¿Qué me parecen las tareas matemáticas que se potencian? ¿Y las competencias? Junto con ello, es vital poder interactuar con otros profesores sobre estos temas, y poder crear un ambiente en que se compartan las ideas y reflexiones, porque estas propuestas presentadas carecen de sentido si no son discutidas y reflexionadas, antes de se su aplicación en la sala de clases.

Referencias bibliográficas

Abrantes, P. (2001). Mathematical Competence for all: options, implications and obstacles. *Educational Studies in Mathematics*, (47) 125-143.

Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1990). *Funciones y gráficas*. Madrid, Ed. Síntesis.

Font, V. (2001). *Processos mentals versus competència*. Biaix, (18) 33-36.

Janvier, C. (1981). Use of situations in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, (12), 113-122.

Leinhardt, G.; Zaslavsky, O., Stein, M.K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Task, Learning, and Teaching, *Review of Educational Research*, (60) 1-64.

Ministerio de Educación y Ciencia. (2006). *Enseñanzas Mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.* **(¿QUÉ PAÍS?)**

Niss, M. (2002. *Mathematical competencies and the learning of mathematics: The danish kom project.* Proyecto KOM. The national academies: The national academies. Http://www7.nationalacademies.org/mseb/mathematical_competencies_and_the_learning_of_mathematics.pdf.

OCDE. (2005). *Informe Pisa 2003, aprender para el mundo del mañana*. España, Ed. Santillana.

Rico, L. (2006). Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas. *Revista de Educación*, (extraordinario), págs. 275-294.

Shell Centre for Mathematics Education. (1990). *El lenguaje de funciones y gráficas*. Bilbao, Gobierno Vasco.

Solar, H. (2006). *La interpretación de gráficas y tablas en marcos y materiales curriculares, a través de un análisis de texto*. Tesis de master. Barcelona, UAB.

Capítulo 9

Introducción al Concepto de Función y a las Funciones Lineales

Roberto Vidal, Jorge Neira , Nelson Valenzuela

Contenido

- *Resumen*
- *Justificación de la Unidad Didáctica*
- *Presentación del tema*
- *Presentación de la Unidad Didáctica*
- *Desarrollo de la Unidad Didáctica*
- *Actividades de enseñanza, aprendizaje y evaluación*
- *Referencias bibliográficas*

Resumen

La búsqueda de regularidades o patrones, constituye una de las principales actividades del quehacer matemático actual. Ideas brillantes que surgieron de parte de científicos, que lograron establecer conexiones entre fenómenos tan aparentemente inconexos, como ocurrió con el genial Galileo que estableció un nexo entre la oscilación de una lámpara en el interior de un iglesia, y la caída de los cuerpos, o la brillantez de Newton al relacionar las mareas con el movimiento de los planetas, es hoy una exigencia constante a quienes se desempeñan en el ámbito de la Matemática.

Es así como buena parte de las disciplinas que hacen uso de la Matemática, requieren del estudio de las relaciones entre variables. Físicos, químicos, biólogos, ingenieros, economistas, sociólogos y sicólogos, necesitan determinar la conexión que existe entre los diferentes elementos de su ámbito de investigación, para responder alguna interrogante.

En esta tarea el concepto de "función" (o "método de fluxiones", como las llamó inicialmente Isaac Newton), se vincula al concepto de "modelo matemático".

En este capítulo, haremos una breve introducción al concepto de función y de manera especial, daremos algunas orientaciones para el tratamiento de un tipo de ellas: la función Lineal.

Orientaciones desde la Evaluación

Desarrolle una instancia de "lluvia de ideas", preguntando qué saben de: Regularidades, Variables, Función, coordenadas, Sistemas cartesianos.

9.1 El Sistema de Coordenadas Cartesianas

Un sistema de coordenadas cartesianas en el plano, consiste en un par de rectas numéricas (llamadas ejes coordenados) que son perpendiculares entre sí, en un punto denominado ORIGEN del sistema, al que se le hace corresponder el cero en cada recta. Es así como la posición de cada punto del plano, queda determinada por un único par ordenado de números reales (que son sus coordenadas), y a la inversa, a cada par ordenado de números reales, se le asocia un punto único en el plano.

Con estos dos ejes, el plano queda dividido en 4 sectores denominados CUADRANTES, que designaremos por Q_1, Q_2, Q_3, y Q_4.

Los ejes reciben el nombre de eje X o eje de las abscisas, y eje Y o eje de las ordenadas como se indica en la Figura 1.

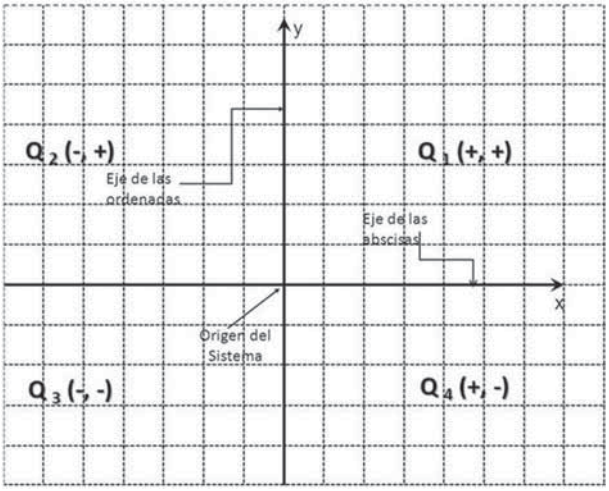


Figura 1: Representación del Sistema de Coordenadas Cartesiano

Orientaciones desde la Evaluación

Inicie el desarrollo de los siguientes ejercicios planteando la pregunta: ¿En dónde se puede encontrar Sistemas de Coordenadas? ¿Cuál es su utilidad en el diario vivir?

1. Dibuje un Sistema de Coordenadas Cartesiano (Figura 2), y en él ubique los siguientes puntos:

   P (–1, –2), Q (–3, 5), R (2, 3), S (0, 2), T (–3, 0)

2. Marca o pinta las regiones del plano indicadas en cada caso:

   a) $x > 0$, $y > 0$

   b) $x > 0$, $y < 0$

   c) $x < 3$, $y < 4$

   d) $x > -3$, $y < 4$

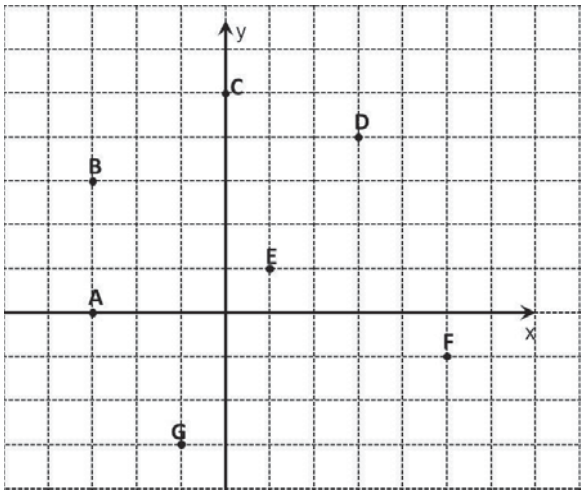


Figura 2.

3. A partir del Sistema de Coordenadas, determine los pares ordenados que representan a los puntos allí señalados. Aproveche este mismo sistema para trazar en él un rectángulo, señalando sus componentes.

9.2 El Concepto de Variable

Orientaciones Didácticas y Metodológicas

El estudio del movimiento (especialmente de los planetas), hasta el siglo XVI presentaba grandes carencias para los físicos, pues no contaban con las matemáticas adecuadas que les permitiesen una buena descripción.

Gracias a los estudios que relacionan tiempo y distancia, intensidad de la corriente eléctrica versus diferencia de potencial, o energía cinética versus rapidez, emerge el concepto de función a partir de la necesidad de analizar los comportamientos de dos magnitudes variables, que se relacionan por algún tipo de dependencia.

Este pasaje histórico ilustra muy bien que el concepto de Variable, es uno de los conceptos claves en la comprensión de las funciones. Por esto, una vez que los estudiantes se han apropiado del plano cartesiano, con su utilidad para elaborar representaciones gráficas,

Imagen del Sistema Heliocéntrico propuesto por Copérnico.

proponemos que se inicie el estudio de las funciones, mediante una buena adquisición del concepto de variable. Como podrá verse más adelante en esta propuesta, otros conceptos propios del mundo de las funciones, aparecen vinculadas a la noción de variable, tal como dominio, recorrido, imagen, pre-imagen, gráfico, modelo.

Orientaciones desde la Evaluación

Plantee una reflexión sobre lo que entiende por valor fijo para entregar la idea de constante.

Intuitivamente, entendemos variable como algo que varía. Corresponde a una característica de objetos, personas o cosas que pueden tomar más de un valor. Por ejemplo, si preguntas a cada uno de tus compañeros cuántos hermanos tiene o cuál es su estilo de música favorita, las respuestas serán diversas. Decimos así que "número de hermanos" y "estilo de música" son variables, pues pueden tomar distintos valores.

Por ejemplo el número de hermanos puede ser 0,1,2,3, etc. *¡claro que es limitado!*

El estilo de música favorito de una persona, puede ser: Rock, Pop, Clásico, Tropical, etc.

9.2.1 Tipos de variables

Las variables como *estilo de música* que te mostramos, reciben el nombre de ***variables cualitativas,*** ya que los valores que toman son cualidades o atributos de una persona, un objeto, etc.

En cambio, *el número de hermanos* toma valores numéricos con los que se puede realizar diversas operaciones (sumar, promediar, etc). Este tipo de variables se denominan ***variables cuantitativas.*** De aquí en adelante nos centraremos en estas últimas. En oposición al concepto de variable, está el concepto de ***constante***. Una constante corresponde a un valor fijo como el número de días de una semana, o como en física, es la aceleración de gravedad $g \approx 9,8\frac{m}{s^2}$.

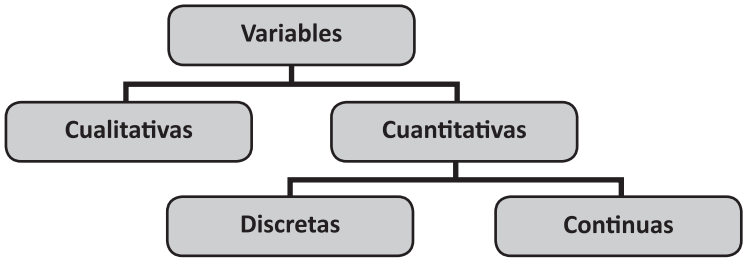
Es importante que al trabajar con variables cuantitativas, identifiques si estas son *discretas* o *continuas*.

Para considerar

Una variable *continua*, es aquella en que tomando dos valores cualesquiera, puedes encontrar tantos valores intermedios como quieras. Si esto no es posible, la variable es *discreta*.

El número de hermanos es una variable discreta, ya que no tendremos respuestas como *"tengo 2 hermanos y medio"* o *"tengo 5,12 hermanos"*. Un ejemplo de variable continua es la estatura de una persona cualquiera. ¿Por qué?

Observa este diagrama de los tipos de variables:



Indica cuáles representan variables discretas y cuáles variables continuas.

a) El tiempo que te tomará responder una prueba de Lenguaje.

b) El número de glóbulos blancos que se encuentran en un centímetro cuadrado.

c) El número de periódicos vendidos en determinada ciudad, el 31 de Marzo de este año.

d) El cambio en el peso de cinco mujeres durante un período de cuatro semanas.

e) El número de goles anotados por cinco jugadores seleccionados al azar, durante el campeonato de fútbol.

f) Milímetros de agua caída en la ciudad de Puerto Montt durante los meses de invierno.

g) Velocidad que alcanza un auto en carretera.

h) Número de billetes de $ 20.000 en circulación en La Serena en cada momento.

i) Número de alumnos matriculados en segundo medio en tu colegio, en varios años.

Orientaciones desde la Evaluación

Antes de entrar al tema solicite a los estudiantes, ¿qué es una relación matemática?

9.3 Relaciones entre variables: ¿De qué depende?

Orientaciones Didácticas y Metodológicas

Para llegar al concepto informal de función, se propone utilizar distintas situaciones cotidianas en que aparecen dos variables relacionadas entre sí. El objetivo de tales situaciones, es que se reconozca una variable independiente, y otra que depende de la anterior. También puede ser el momento adecuado para presentar la idea: "r está en función de q", traduciéndola como "r depende de q", y que los alumnos puedan redactar cada uno de los ejemplos propuestos en esta forma, identificando a r como la variable dependiente y q como la independiente.

El concepto de función en el tiempo ha tenido múltiples transformaciones, hasta llegar a la definición formal y conjuntista. Sin embargo, esta definición está fuera de los alcances del programa escolar y de este texto, por lo que insistimos en que la introducción de este importante concepto matemático, se haga a modo informal, tal como tuvo su origen en el siglo XVII, época en que los matemáticos caracterizaban la función como una "dependencia de dos variables". Nótese entonces que para este nivel introductorio, NO son necesarios los conceptos previos de relación y producto cartesiano, sino los de variable y relación entre variables.

Siempre que hay alguna relación entre dos variables, una toma el rol de **variable independiente** y la otra de **variable dependiente**. Aquí hay algunas situaciones:

Orientaciones desde la Evaluación

Solicite a sus estudiantes ejemplos en donde se cumple y no se cumple, una relación entre dos variables.

En cualquiera de estas situaciones, un cambio de valor en la variable independiente, producirá también un cambio en la variable dependiente. En el primer ejemplo, sacar 10 fotocopias tendrá un cierto valor, pero al sacar 25, el valor a pagar será otro.

Otra manera de expresar que una variable y depende de otra variable x, es utilizando la frase: "*y está en función de x*".

Para considerar

Utilizaremos la palabra **Función** para indicar una *relación de interdependencia* de dos variables, siempre que para *cada valor que tome la variable independiente, le corresponda tomar un único valor a la variable dependiente.*

Orientaciones desde la Evaluación

Solicita a sus estudiantes que le definan variable dependiente e independiente.

Para cada expresión señala cuál es la variable independiente y cuál es la dependiente. Justifica.

a) Número de entradas vendidas en un recital y dinero recolectado.
b) Número de calzado de una persona y la edad de la persona.
c) Distancia recorrida por un automóvil y el tiempo que se demora en recorrerla (a una velocidad fija).
d) Número de butacas de un cine y cantidad de personas que completa su capacidad.
e) Cantidad de cartas enviadas por correo y costo a pagar.
f) Número de minutos hablados por teléfono celular, y valor a pagar en la cuenta de fin de mes.

Orientaciones desde la Evaluación

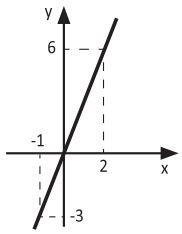
Trabaje en la posibilidad de realizar, por parte de los estudiantes, un Mapa Conceptual con conceptos claves y conectores, de modo que representen lo asimilado hasta el momento.

9.4 Formas de Representar una Función

Orientaciones Didácticas y Metodológicas

Existen muchas investigaciones en el campo de las Ciencias Cognitivas y más aún, trabajos especializados en el abordaje de las funciones a nivel escolar (Duval, 1999, Sierra, M. González, M.T. y López, M. 1998), que indican que para comprender un objeto de saber, en particular el de Función, es necesario que se trabajen sus distintas representaciones. Algunas de estas formas de representar las funciones son: la forma verbal, la numérica, la algebraica y la gráfica. También está la conjuntista, la que, insistimos, queda fuera del ámbito inicial que aquí presentamos.

Por ejemplo, si a un alumno se le presenta la función que asigna a cada número su triple, este enunciado verbal se transfiere a la:

Representación numérica		*Representación Algebraica*	*Representación Gráfica*
x	f(x)	*y = 3x*	
-2	-6		
-1	-3		
0	0		
1	3		
3	9		

Estas "transferencias" entre representaciones, proporcionarán una buena idea acerca del "grado de comprensión" que han alcanzado los estudiantes. En esta propuesta, insistimos en los pasajes de una representación a otra para conocer mejor las funciones.

Una función puede representarse de distintas maneras. Utilizaremos la

- *Forma verbal*: dando una descripción por medio de palabras.
- *Forma numérica*: mostrando una tabla de valores.
- *Forma algebraica*: a través de una fórmula.
- *Forma gráfica*: mostrando un gráfico que describe el comportamiento de las variables.

Algunas funciones pueden representarse de más de una de estas formas. Para conocer más a fondo una función, es muy importante que puedas representarla de todas las formas posibles.

Veamos algunos ejemplos:

Felipe abre un local de fotocopiado, y en un cartel pone que cada fotocopia cuesta $20. Para apresurar la cuenta y atender sin mayor demora a sus clientes, piensa que será bueno disponer de una tabla como esta:

Nº de fotocopias	1	2	3	4	5	6	7	100	1000
Valor en $	20	40							

En esta tabla, se organizan los valores de las variables dependiente e independiente. Esta es la Representación numérica de la función que asigna un costo único a cada número de fotocopias.

- Copia esta tabla en tu cuaderno y ayuda a Felipe a completarla.

Orientaciones desde la Evaluación

Utilice estas instancias para seguir insistiendo en que los estudiantes identifiquen el tipo de variable, y sus respectivas dependencias.

- ¿Qué procedimiento debe hacer Felipe para completar la tabla?

La respuesta a esta pregunta nos da la clave, para encontrar otra forma de representarla: la algebraica. Cada valor en pesos, se obtiene multiplicando por 20 el número de fotocopias.

Si designamos por *x* a la variable independiente (número de fotocopias), y por *y* a la variable dependiente (valor a pagar), la relación algebraica es: ***y* = 20*x*.**

Representación algebraica *que describe la función que asigna un costo único a cada número de fotocopias.*

Aunque se puede utilizar distintas letras, generalmente **"x"** representa la variable independiente, e *"y"* la variable dependiente.

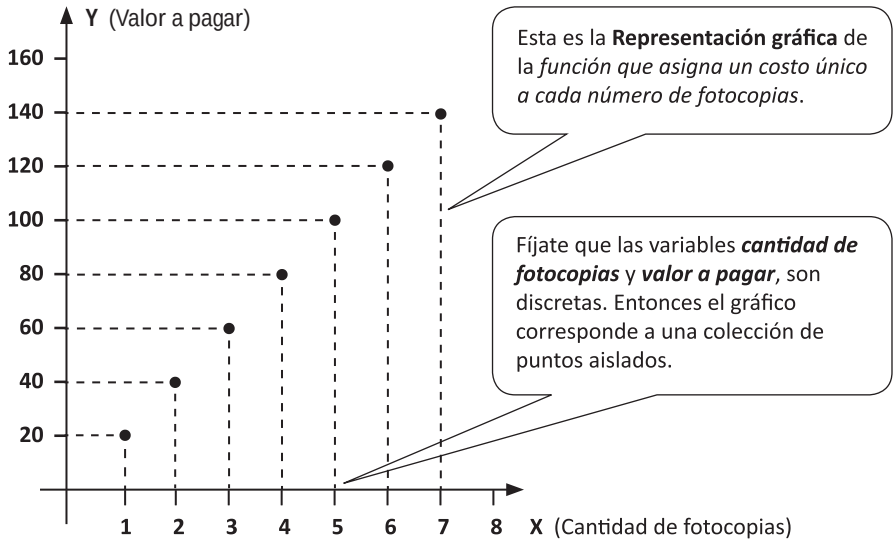
$$y = f(x)$$

Además, en la tabla se aprecia claramente que si se duplica, triplica, etc. el número de fotocopias, el valor a pagar también se duplicará, triplicará, etc. Entonces, las dos variables relacionadas son directamente proporcionales, siendo 20 la *constante de proporcionalidad*.

La constante de proporcionalidad directa, es el número por el cual hay que multiplicar cada valor de la variable independiente, para encontrar el valor de la variable dependiente.

Orientaciones desde la Evaluación

Solicite a los estudiantes que elaboren el gráfico correspondiente a la tabulación realizada, e identifiquen elementos claves de la construcción, como es: pendiente o constante de proporcionalidad, Ecuación de la recta.



Para elaborar el gráfico o bien al interpretarlo, debe tenerse en cuenta la naturaleza de las variables, esto es, identificar si son discretas o continuas. Veamos esto con la situación siguiente:

En un movimiento uniforme, la relación entre la distancia recorrida por un vehículo y el tiempo que demora en recorrerla, son magnitudes directamente proporcionales cuando la rapidez es constante.

Copia en tu cuaderno la siguiente tabla y complétala, para que describa la relación de interdependencia entre la distancia y el tiempo, para una rapidez fija de 80 km/h.

Tiempo (h)	Distancia (km)
1	80
2	
3	
4	
5	
6	
7	

- ¿Cómo calcularías el tiempo para una distancia de 350 km?

A cada unidad de tiempo, le corresponde una distancia única, es decir, la *distancia está en función del tiempo*. La **representación algebraica** de esta función es:

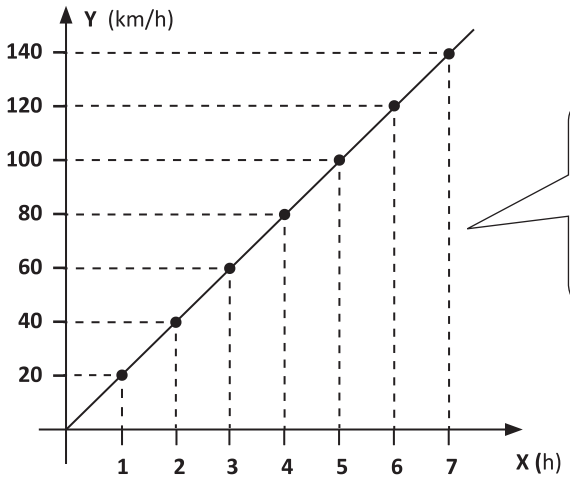
$$d = 80t$$

- ¿Cuál es la constante de proporcionalidad en este ejemplo?

Orientaciones desde la Evaluación

Desarrolle con los estudiantes conjeturas respecto de las características del gráfico a obtener: continuo o discretos, etc.

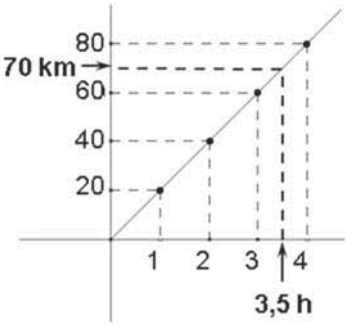
El gráfico de esta función es:



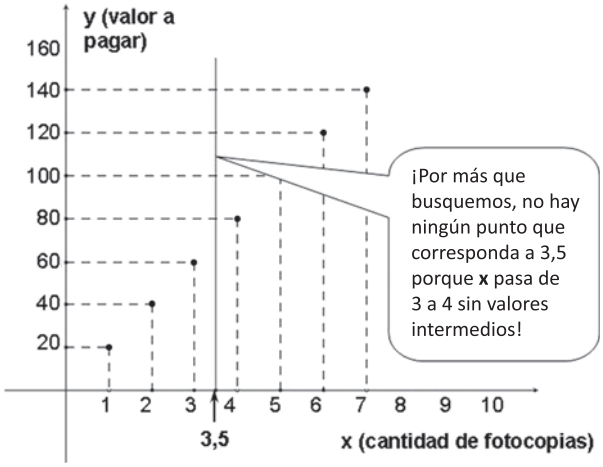
La **representación gráfica** de esta función es continua. Los puntos están unidos por una semi-recta.

Esto sucede porque las variables *distancia* y *tiempo* son continuas.

Observando la gráfica, tiene sentido preguntarse por la distancia que se recorre en 3,5 horas.



No así con el ejemplo de las fotocopias. ¡*Sería absurdo preguntarse por el costo de 3,5 fotocopias!*



9.5 Notación de una función

Orientaciones Didácticas y Metodológicas

En la representación algebraica de una función, si la variable independiente es x y la variable dependiente es y, se adopta la nueva notación y = f(x) que significa que "y" es una función de "x", es decir, que un cambio de valor de "x", producirá un cambio de valor en "y". Por lo tanto, los alumnos incorporan a la notación matemática, que escribir "y" es lo mismo que escribir "f(x)" (en este contexto funcional).

El precio "p" a pagar por "x" fotocopias, en que cada una cuesta $20, se puede representar algebraicamente por p = 20x o bien, como p es función de x, por p(x) = 20x.

Toman sentido entonces, las notaciones tipo p(4), p(1), p(20), que significan el precio a pagar por 4, 1, o 20 fotocopias respectivamente.

Si lo llevamos a una tabla de valores, podemos mostrar claramente en forma alternativa a como se presenta en el texto del estudiante, los conceptos de pre – imagen e imagen de una función. En la tabla se muestran los precios de 1 a 5 fotocopias.

x	*p(x)*
1	20
2	40
3	60
4	80
5	100

A cada valor de x (1,2,3,4,5) se le llama pre – imagen de p(x).

1 es la pre – imagen de 20, 2 es la pre – imagen de 40, etc.

A cada valor de p(x), se le llama imagen de x.

20 es la imagen de 1, 40 es la imagen de 2, y así sucesivamente.

La variable dependiente *"y"*, también se suele escribir "*f(x)"*, de modo que si lo necesitamos, podemos sustituir una notación por otra. Esto porque al tener ***y = f(x)***, tal expresión nos indica que la variable y depende de *"x"* según la función que describa *"f"*.

Para simbolizar una función, generalmente se utiliza la letra *"f"*, aunque si se trabaja con varias funciones, para distinguirlas se usan otras letras como *"g o h"*.

Pongamos algunos ejemplos:

La expresión $f(x) = x^2$ denota la función *"f"* que asigna a cada número *"x"*, su cuadrado.

Al número 3 le asociará el 9, al -5 le asignará el 25 y al 0 el mismo 0, etc. Estas proposiciones se abrevian escribiendo:

$$f(3) = 9;\ f(-5) = 25;\ f(0) = 0$$

Otra función, es $g(x) = \frac{x+3}{x-1}$, la cual asigna a cada valor que demos a x, el número que se obtiene al sustituir tal valor en la fracción $\frac{x+3}{x-1}$. Por ejemplo, ¿qué valor le corresponde a x = 6?

Reemplazamos el 6 en el lugar de x, obteniendo: $g(6) = \frac{6+3}{6-1} = \frac{9}{5}$.

Respuesta: Cuando x = 6, se tiene $g(x) = \frac{9}{5}$.

Habitualmente, para referirnos a un valor de x o uno de $f(x)$, usaremos los conceptos que se definen a continuación.

Para considerar

Sea f una función.

a) A cada valor que pueda tomar la variable independiente x, se le denomina **pre - imagen** de f(x).

b) A cada valor que tome la variable dependiente f(x), se le denomina **imagen** de x.

Retomando las dos funciones anteriores, al tener f(3) = 9, decimos que "la imagen de 3 es 9 según la función f", o bien que "3 es la pre – imagen de 9".

He aquí un desafío: Dada la función h(x) = 3x + 1, calcular el valor de "x" de modo que h(x) = 0.

Una vez que lo tengas, verifica que es el valor buscado, calculando su imagen y viendo que esta debe ser $-\frac{1}{3}$.

9.6 Dominio y Recorrido de una Función

Orientaciones Didácticas y Metodológicas

Este tema debe ser abordado superficialmente en este nivel inicial, pues corresponde a un contenido formal, si se desea extender a otras funciones no lineales ni afines. En el caso del tipo específico de funciones que abordamos (lineales y afines), el dominio y recorrido está siempre dado por el conjunto de los números reales, y no presta mayor problema. Sin embargo, de todos modos mostramos algunos ejemplos para la transición de este hecho, a cuando hay restricciones de valores permisibles por una determinada función, como es el ejemplo de la librería de Don Juan (que admite una función de variables discretas), o cuando una función relaciona variables de tipo continua. Sin embargo, es necesario que los estudiantes identifiquen el dominio, como el conjunto de aquellos valores admisibles de la variable independiente, y el recorrido como el conjunto formado por los valores que toma la variable dependiente. Interesa que los alumnos noten que por ejemplo, 3,5 no está en el dominio de la función "costo de las fotocopias", o que al hacer una llamada telefónica en que se cobra 100 pesos por cada 3 minutos, en el recorrido no hay valores intermedios entre 100 y 200 pesos, ni entre 200 y 300 pesos, etc.

Los valores de la variable independiente a veces son limitados.

- En la función $g(x) = \frac{x+3}{x-1}$ el valor de g(x) depende de una fracción con denominador variable y éste se hace cero cuando x = 1. Entonces g(1)da:

$$g(1) = \frac{1+3}{1-1} = \frac{4}{0}$$

Recuerda que no es posible la división por 0.

Luego para esta función g, x puede tomar cualquier valor real excepto el 1.

Para considerar

Sea f una función. Definimos el ***dominio de la función*** f y que denotamos por $f\ Dom_f$ como el conjunto formado por todas las pre — imágenes. En otras palabras, todos los valores que puede tomar la variable independiente, forman un conjunto llamado *dominio de la función f.*

Así, en los ejemplos anteriores, el dominio de la función g, definida por $g(x) = \frac{x+3}{x-1}$, es el conjunto de todos los números reales menos el 1. En símbolos: $Dom_g = \mid R - \{1\}$.

De forma similar, para una función "f", los valores que toma la variable dependiente forman un conjunto llamado Recorrido de la función "f", y que se denota por Rec_f.

Por ejemplo, la función $t(x) = 2x^2 + 1$, definida sólo para los valores de x: 1, 3 y -2, tendrá por imágenes:

$$t(1) = 2 \cdot 1^2 + 1 = 3$$

$$t(3) = 2 \cdot 3^2 + 1 = 19$$

$$t(-2) = 2 \cdot (-2)^2 + 1 = 9$$

Entonces, $Dom_f = \{1, 3, -2\}$ y $Rec_f = \{3, 19, 9\}$.

- En la librería de Don Hernán, cada fotocopia cuesta 20 pesos. Podemos estar interesados en que nos saquen 1,2, 3, etc. fotocopias, pero el número de fotocopias no puede ser pongamos por caso, 1,2. Entonces, decimos que 1,2 no está en el dominio de la función que asigna un costo p, al sacar x fotocopias. También observa que si sacamos 1,2 ó 3 fotocopias deberemos

pagar 20, 40 ó 60 pesos. Decimos que estos valores de p están en el recorrido de la función; en cambio, 30 pesos no es un valor del recorrido, pues no corresponde al cobro de ningún número de fotocopias.

El dominio de la función costo es el conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., n\}$ para un cierto valor n.

El recorrido de la función costo es el conjunto $\{0, 20, 40, 60, 80, ..., 20n\}$.

9.7 La Función Lineal

Orientaciones Didácticas y Metodológicas

El primer modelo matemático que conocen los estudiantes en los años anteriores, es el de la proporcionalidad directa, la que toma el estatus de función lineal. La caracterización algebraica de la proporcionalidad directa de las variables x e y, es $\frac{y}{x} = m$, con k constante, o bien y = mx.

En la actividad propuesta, los alumnos encontrarán que cada gráfica es una recta, y que cuando la constante de proporcionalidad m es positiva, las rectas "suben" de izquierda a derecha y bajan en los casos que m es negativo. Ya sea con muchas gráficas o bien con apoyo de un software matemático, cuyo uso se encuentra al final de la unidad, se puede visualizar que mientras mayor sea el valor positivo de m, la recta tiene mayor inclinación. Tomando valores negativos de m, la recta es más empinada a medida que m es menor. A partir de ahí, m influye en la inclinación de la recta con respecto al eje X, lo que justifica bautizar a m como la "pendiente" de la recta.

El número m, además, permitirá esbozar el gráfico de la función lineal. Una escalera como se ve en el texto del alumno, o con el cuadriculado de un cuaderno, el concepto de pendiente se puede definir como la razón entre el desplazamiento vertical, y el avance horizontal. El avance (acordamos aquí), es siempre de izquierda a derecha, mientras que el desplazamiento vertical puede ser hacia arriba o abajo, lo que se indica por un signo $+$ 0 $-$ respectivamente. Así, la pendiente m = $\frac{3}{4}$ indica que avanzamos 4 unidades y subimos 3, una pendiente m = -2, la escribimos como m = $\frac{-2}{1}$, nos indica que por cada unidad de avance, bajamos 2 unidades.

Recordemos que dos magnitudes son directamente proporcionales, cuando la razón de cada pareja de valores respectivos "y" y "x" de cada magnitud, es constante. Es decir:

$\frac{y}{x} = m$, donde m es llamada *constante de proporcionalidad*.

Al escribir y en función de x, nos queda: **y = mx**.

La proporcionalidad directa, es una de las relaciones entre variables, que nos ha permitido resolver problemas como muestran las situaciones anteriores, en que los valores de x e y dependen de un contexto de la vida cotidiana.

En Matemáticas, se han construido **modelos** generales, a partir de estas situaciones particulares. En lo que sigue veremos algunos de los más sencillos. Uno de ellos, es el modelo matemático al que se ajustan los casos de proporcionalidad directa, al cual se le llama **modelo o función lineal**. Por ello, decimos en lenguaje coloquial, que *la casa de la proporcionalidad directa es la Función Lineal.*

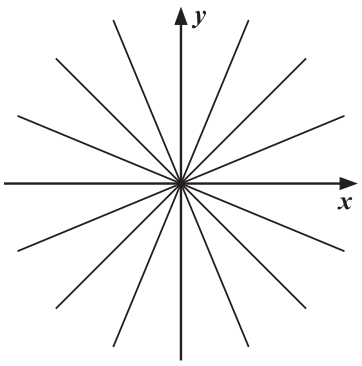
Para considerar

Una función lineal, es aquella en que se mantiene constante la razón de cada pareja de valores de dos variables (una en dependencia de la otra). Si x e y son las variables, la representación algebraica es $f(x) = mx$, donde m es una constante llamada pendiente o coeficiente de dirección. Además se asume que para $x = 0$, se tiene $f(x) = 0$.

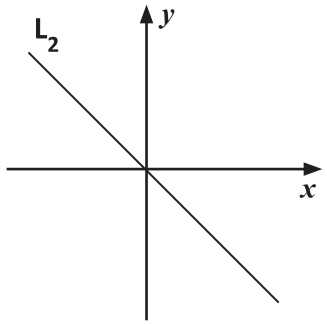
Conozcamos más de esta función, a través de sus otras representaciones.

Aquí te mostramos el esbozo de las gráficas de distintas funciones lineales realizadas en un software graficador:

Como habrás advertido, **las gráficas de las funciones lineales** $f(x) = mx$ **son rectas que pasan por el origen** del sistema de coordenadas. Además, se distinguen los siguientes dos casos:

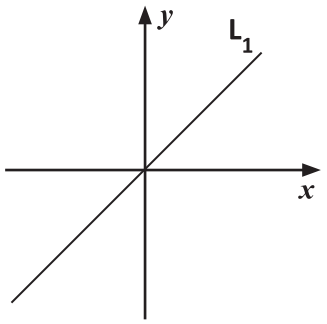


Cuando m **es positivo**, la recta "sube" al mirarla de izquierda a derecha. Mientras mayor sea el valor de m, la recta es más "empinada".



La recta L_1 es la representación gráfica de $f(x) = +x$.

Cuando m **es negativo**, la recta "baja" al mirarla de izquierda a derecha. Mientras menor sea el valor de m, la recta es más "empinada".



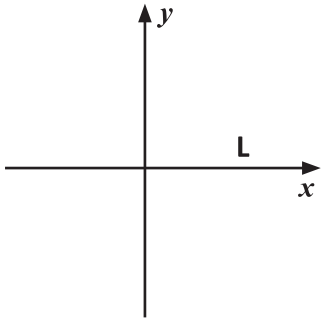
La recta L_2 es la representación gráfica de $f(x) = -x$.

Como ves, queda muy claro por qué se llama *pendiente* a la constante m.

9.7.1 Una función especial

Una situación particular, pero que no podemos dejar de nombrar es aquella en que $m = 0$.

En este caso, la representación algebraica quedaría: $f(x) = 0x = 0$. Así, la función que queda, da el valor cero para $f(x)$, sin importar quién sea x. Su gráfica es una recta coincidente con el eje X.



Para ejercitar:

1. El siguiente gráfico muestra la distancia d recorrida por un vehículo en movimiento uniforme, en función del tiempo t que dura el trayecto.

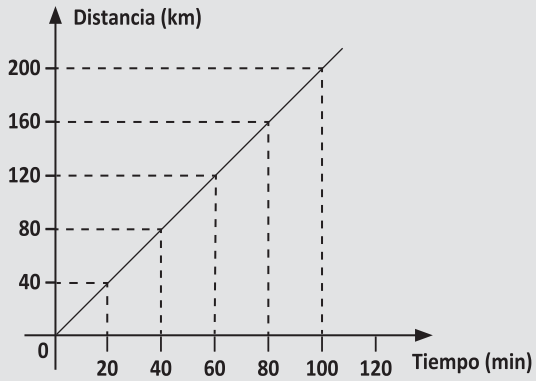
   A partir del gráfico señale:

   a) ¿Cuánto demora en recorrer 80 km?

   b) ¿Qué distancia recorrió en 1 h y 20 min?

   c) Encuentra una expresión para calcular la distancia en función del tiempo.

   d) Utilizando la expresión encontrada en c), vuelve a resolver los ejercicios a) y b).



2. Dada la función lineal f(x) = -3x. Calcula:

   a) f(-1) b) f(1) c) f(0) d) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ e) $f\left(\frac{1}{9}\right)$ f) $f\left(\frac{3}{2}\right)$

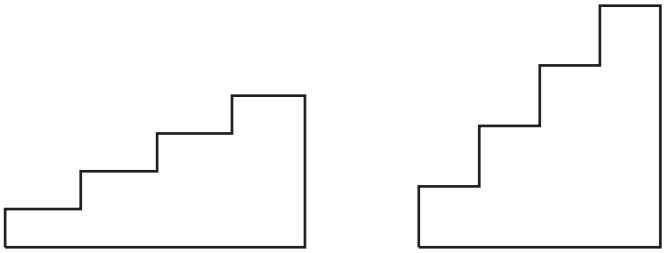
3. Representa gráficamente las siguientes funciones lineales, en un mismo sistema de coordenadas.

   $f_1(x) = x$ $f_2(x) = 2x$ $f_3(x) = -3{,}5x$ $f_4(x) = -2x$ $f_5(x) = -x$ $f_6(x) = 3{,}5x$

4. Compara los gráficos. ¿En qué influye el signo de la pendiente?

9.7.2 La pendiente como recurso para elaborar el gráfico de una función lineal

Para comprender el significado de la pendiente como recurso graficador, veamos antes cómo surge este concepto, desde la necesidad de "medir" la inclinación de objetos tan reales como las escaleras.

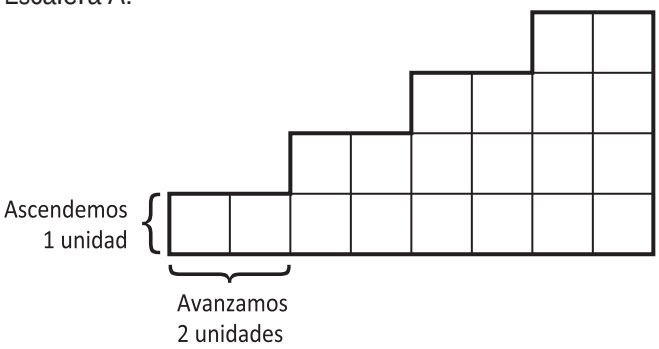


1. ¿Cuáles de estas escaleras tiene mayor pendiente?
2. ¿Cómo podríamos asignar un número a la pendiente, sin utilizar ángulos?

Vamos a trabajar con estas escaleras para luego aplicar el "número pendiente", a las gráficas de rectas.

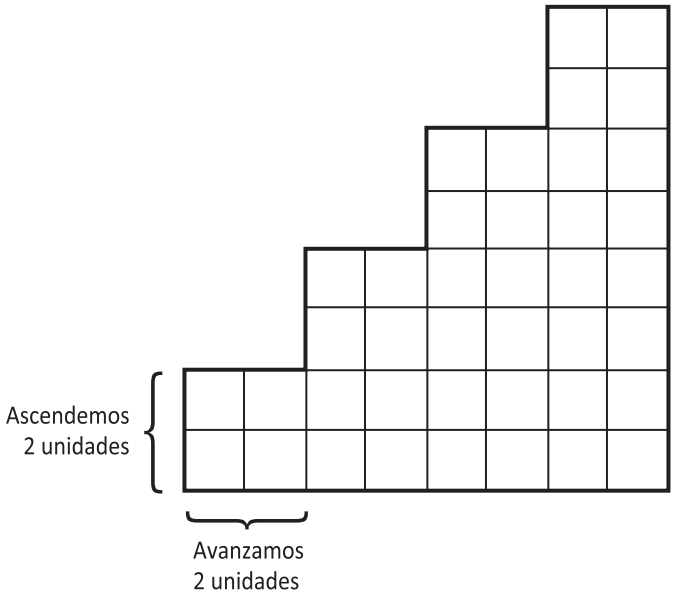
Nos dedicaremos a dar respuesta a la segunda pregunta. Cuadriculando cada escalera, para subirla:

- Escalera A:



En esta escalera, por cada 1 unidad que se asciende, se avanzan 2 unidades.

- Escalera B:

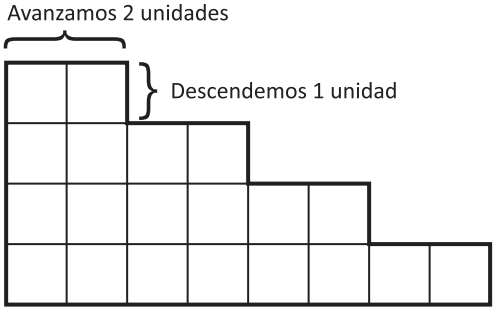


En esta escalera por cada 2 unidades que se ascienden, se avanzan 2 unidades también.

Entonces podemos diferenciar la pendiente de cada escalera, comparando por cada cuántas unidades de ascenso, cuántas se avanzan. Resulta natural de esta interpretación definir la pendiente como la razón entre las unidades de ascenso y las de avance.

$$\text{Pendiente} = \frac{\text{Desplazamiento vertical}}{\text{Avance}}$$

Por tanto, la escalera A tiene pendiente $\frac{1}{2}$ y la escalera B tiene pendiente $\frac{2}{2} = 1$. Resulta un buen índice para comparar, pues, la segunda escalera es más empinada que la primera, y numéricamente 1 es mayor que $\frac{1}{2}$. ¿Y qué sucede si bajamos la escalera? Acordemos previamente que una escalera para bajarla, debe estar en la posición:



Fíjate que el ***movimiento horizontal*** es siempre **avance**. En cambio el ***desplazamiento vertical*** puede ser **ascenso**, que identificaremos anteponiendo un signo +, y si es **descenso** antepondremos un signo –.

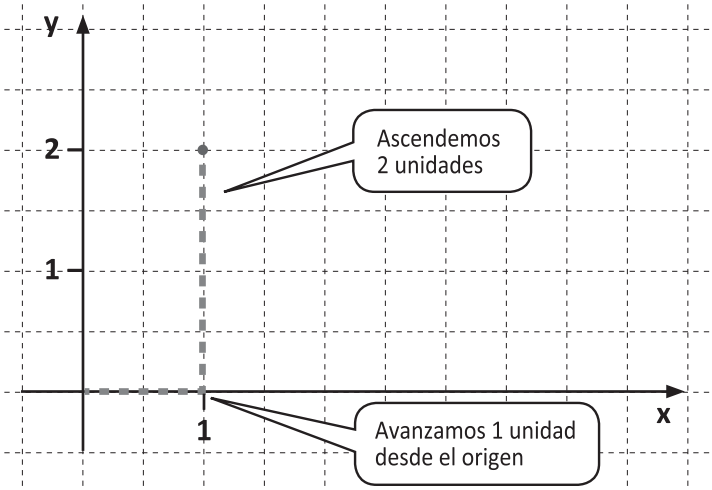
Haciendo caso a este acuerdo, la pendiente de esta escalera C es $-\frac{1}{2}$, ya que el *desplazamiento vertical* es -1 (o sea, baja una unidad), por cada 2 unidades de *avance*.

Considera la función f definida por $f(x) = 2x$. Para construir su representación gráfica, sin recurrir a una tabla de valores, observa que:

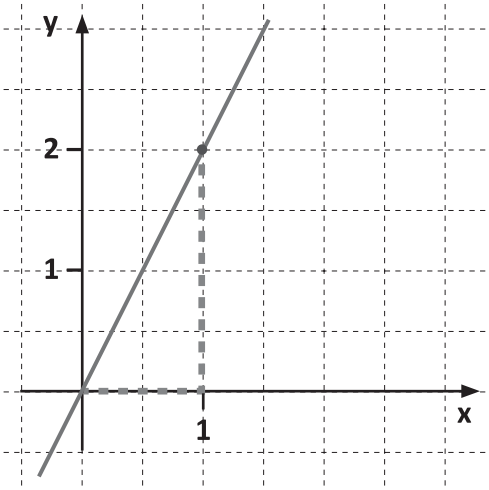
- La pendiente es positiva, por lo tanto la recta "sube" de izquierda a derecha.

- Como la pendiente es 2, podemos escribirla como $\frac{2}{1}$.

Aprovechando que sabemos que la recta pasa por el origen, partimos de ahí avanzando 1 unidad y luego subiendo 2 unidades. Ahí encontraremos un *segundo punto* por donde pasa la recta.



Por conocimientos de geometría elemental, recordarás que se necesitan sólo 2 puntos de ella para trazarla con ayuda de una regla.



Para ejercitar:

1. Grafica cada una de las rectas siguientes, utilizando el método de desplazamiento vertical – avance:

   a) $y = 2x + 1$ b) $2x + y - 5 = 0$ c) $5x - 2y + 7 = 0$

   d) $y = -\frac{5}{6}x + 4$ e) $5x + 2y - 8 = 0$

2. Bosqueja el gráfico de cada recta utilizando tabla de valores.

   a) $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ b) $3x - 8y + 6 = 0$ c) $y = -\frac{3}{5}x$

   d) $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{5}$ e) $3x - 4y + 5 = 0$

3. Determina para cada pareja de puntos el valor de la pendiente.

   a) A = (1, 3) y B = (4, 1)

   b) C = (4, -3) y D = (-2, 7)

   c) E = (8, 3) y F = (0, 0)

   d) G = (-1, -2) y J = (5, -2)

9.8 La Función Afín: El traslado de la función lineal

Orientaciones Didácticas y Metodológicas

La función afín, debe presentarse como un modelo matemático que sirve para resolver problemas, donde existe una magnitud variable que se ve incrementada por una constante (que corresponde al coeficiente de posición). Por ejemplo, se puede proponer problemas que relacionen:

- El largo y el ancho de rectángulos de perímetro fijo.
- El número de triángulos y el número de palos de fósforos que se necesitan para formar redes triangulares.

El ejemplo que mostramos en la propuesta, es la del sueldo de un repartidor de flores.

Hay muchos otros ejemplos que pueden trabajarse con esta función. Con ellos se puede dar sentido al estudio de las expresiones de la forma $y = mx + n$.

Se recomienda a la vez, buscar algunas fórmulas que tengan la forma algebraica de la función lineal. Por ejemplo, suponga que el costo de fabricar un cierto artículo es de 300 pesos, más un costo variable de 50 pesos por cada unidad. La función costo total del artículo está dada entonces por la expresión $C(x) = 50x + 300$, donde x representa el número de artículos. ¡Un función afín!. Se puede hacer preguntas tales como:

- ¿Cuál es el costo de fabricar 10.000 unidades?
- ¿Cuántas unidades se puede fabricar si se dispone de 4 millones de pesos?
- ¿Cuál es el dominio de la función costo?
- ¿Cuál es su recorrido?

Conozcamos ahora una función que está muy ligada a la anterior, es la llamada **Función Afín.**

El sueldo mensual

Una florería paga a sus repartidores un sueldo base de $128.000, más $1.250 por cada entrega que realice. Encuentra una expresión para calcular el sueldo mensual "s", en función del número x de entregas realizadas (sin incluir propinas).

Pongámonos primero en algunos casos particulares para encontrar la fórmula que se pide.

Si el repartidor no hace entregas, recibe el sueldo $s = 128.000 + 1.250 \cdot 0$

Si hace 1 entrega recibe $s = 128.000 + 1.250 \cdot 1$

Si hace 2 entregas recibe $s = 128.000 + 1.250 \cdot 2$

Si hace 3 entregas recibe $s = 128.000 + 1.250 \cdot 3$

Si hace 4 entregas recibe $s = 128.000 + 1.250 \cdot 4$, etc.

En general, vemos que para x entregas el sueldo s está dado por:

$s(x) = 128.000 + 1.250\, x$.

Te dejamos a ti la construcción de la gráfica. Para ello, elabora primero la tabla hasta para 15 entregas.

Entonces, la función sueldo mensual del repartidor es:

$s(x) = 128.000 + 1.250\, x$.

Nota que esta expresión tiene la forma $f(x) = mx + n$, con m y n números conocidos. En efecto, ¿qué valores corresponden a m y n en $s(x) = 128.000 + 1.250\, x$?

Para considerar

Una **Función Afín** es aquella que se describe algebraicamente por la fórmula $f(x) = mx + n$, donde m es la *pendiente* (que ya conocemos), y n se denomina *coeficiente de posición.*

Para ejercitar:

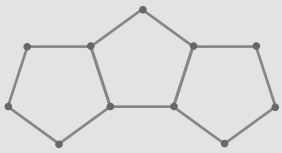
1. Con 5 palos de fósforos se construye una pentágono.

   a) Completa la tabla siguiente:

Nº de pentágonos	1	2	3	4	5	6
Cantidad de fósforos	5	9				

   b) ¿Cuántos palos de fósforos se necesitan para construir otro pentágono en la serie?

   c) Expresa algebraicamente la relación entre número de pentágonos de cada figura y la cantidad de fósforos necesarios para armarla.



   d) ¿Cuántos palos de fósforos se necesitan para formar 8 pentágonos? ¿Y 10 pentágonos?

   e) ¿Cuántos palos de fósforos se necesitan para formar n pentágonos?

2. Dada la función afín $g(x) = 3x + \frac{1}{2}$, determina

   a) g(1) b)g(-5) c) $g\left(\frac{3}{4}\right)$ d)g(0,5) e) $g\left(\frac{-2}{9}\right)$

3. Dada la función afín $h(x) = \frac{x+5}{2}$. Determina:

   a) h(4) b) h(12) c) $h(\sqrt{2})$ d) h(0,3)

4. Se tiene $f(x) = \frac{x}{5} + 2$. Determina:

   a) f(1) b) f(5) c) $f\left(\frac{5}{2}\right)$ d) f(0) e) f(-3) f) f(0,25)

5. Considera la función afín g definida por g(x) = 2x –5. En cada uno de los siguientes casos, determina los números cuya imágenes son:

   i) 1 ii) –5 iii) –1 iv) 0

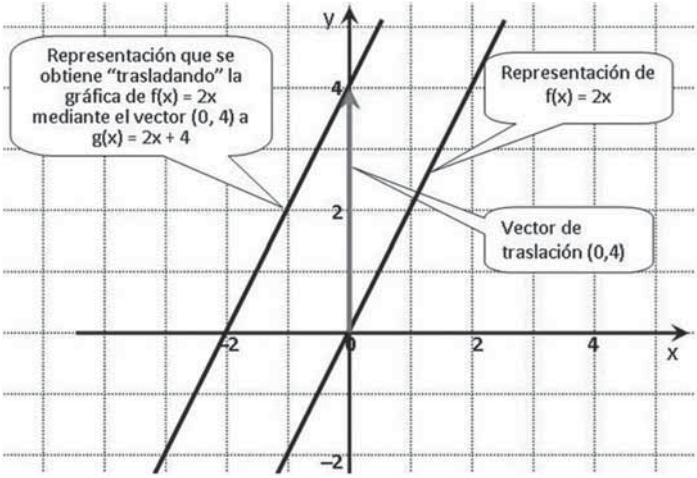
6. Sea g la función afín definida por $g(x) = -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$. Copia y completa en tu cuaderno la tabla:

x	3		2	
g(x)		$-\frac{1}{4}$		$-\frac{31}{2}$

9.9 Relación gráfica entre la función lineal y la función afín

Las gráficas de la función lineal y de la función afín, están muy relacionadas cuando tienen la misma pendiente. En esa circunstancia, se puede trazar una de ellas conociendo la otra.

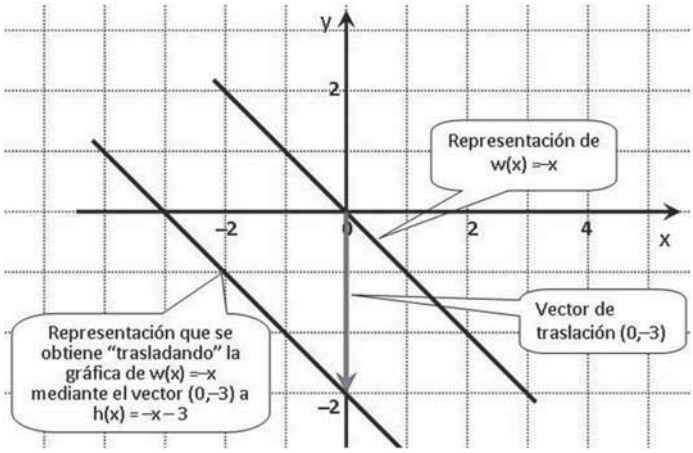
Observa el gráfico de la función lineal $f(x) = 2x$ y la función afín $g(x) = 2x + 4$.



Orientaciones Didácticas y Metodológicas

La función afín se define algebraicamente por la expresión f(x) = mx + n. Gráficamente, corresponde a trasladar el gráfico de la función lineal g(x) = mx en n unidades. Esto puede ser descubierto por los alumnos, ya sea con gráficos en papel milimetrado, o bien con apoyo un software graficador, lo que permite avanzar con mayor rapidez en el análisis gráfico de estas funciones.

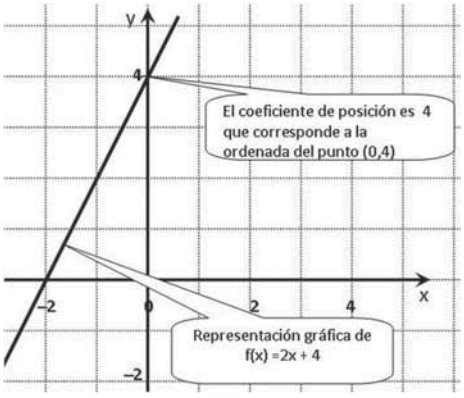
El gráfico de $h\,(x) = -x - 3$ respecto del gráfico de $w\,(x) = -x$:

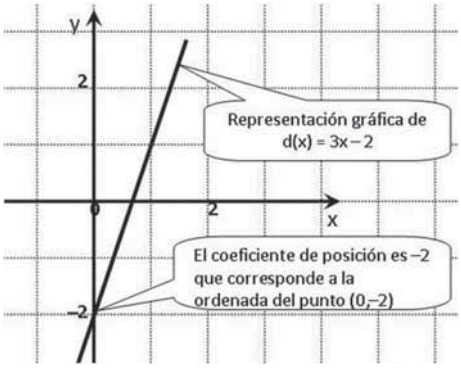


Para considerar

La representación gráfica de la función afín $f\,(x) = mx + n$, corresponde a una traslación de la representación gráfica de la función lineal $g(x) = mx$, según el vector $(0, n)$.

En la actividad anterior habrás notado que el coeficiente de posición n, corresponde a la *ordenada* del punto de corte de la recta $f\,(x) = mx + n$ con el eje y.





Si la función es $d\,(x) = 3x + 2$, su representación gráfica ¿en qué punto corta al eje Y?

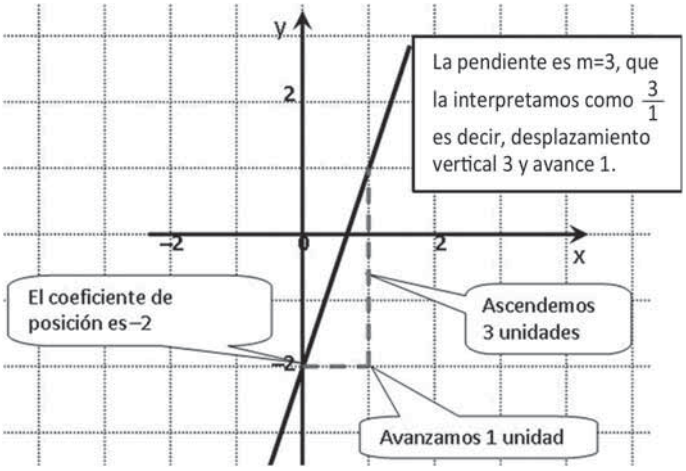
Ya estás en condiciones de elaborar en tu mente, una fotografía de la gráfica de una función lineal o de una función afín, al identificar en la representación algebraica la pendiente y el coeficiente de posición.

Cuando $n = 0$, la expresión **f(x) = mx + n** queda **f(x) = mx**.

Luego, la función lineal, puede considerarse un caso especial de la función afín.

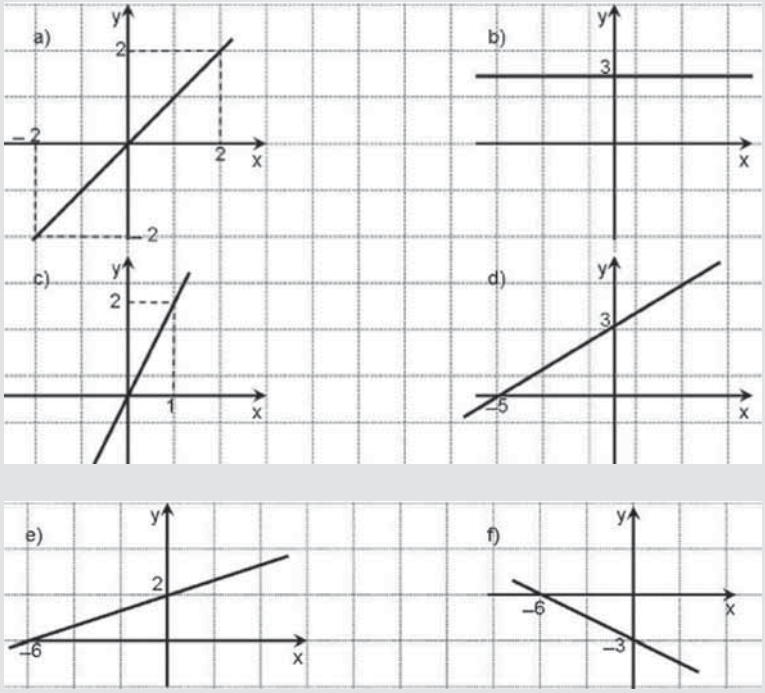
Es muy útil en el estudio de las funciones, imaginarse como debe ser la gráfica, con sólo mirar la ecuación que la describe y a la inversa, dada la gráfica, encontrar la ecuación.

Por ejemplo, la gráfica de la función $f(x) = 3x - 2$, se puede construir sin una tabla de valores, utilizando la información proporcionada por la pendiente y el coeficiente de posición.



Para Ejercitar

1. Escribe la ecuación de la recta que se representa en cada uno de los gráficos.



2. Grafica la recta cuyo coeficiente de posición es 3 y su pendiente es 2.

3. Determina la pendiente y el coeficiente de posición de cada una de las rectas.

   a) $y = 2 - 3x$

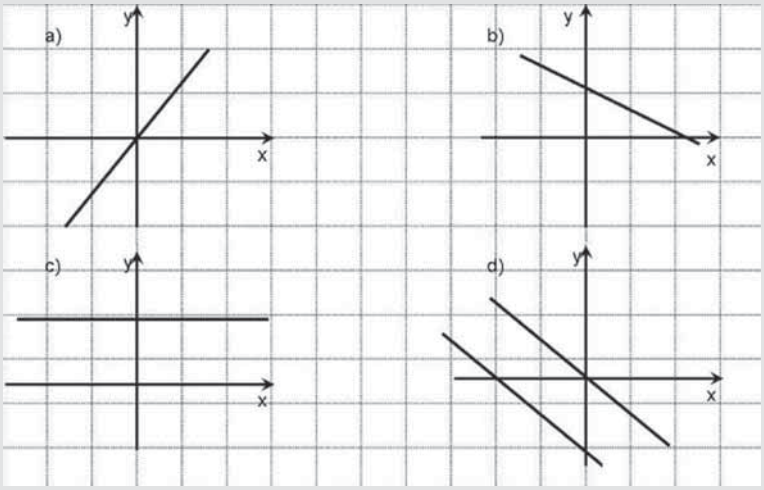
   b) $y = \frac{2}{5}(x - 1)$

   c) $y = 2x + 1$

   d $x - 2y - 7 = 0$

   e) $y - 3x = 9$

4. Observa los gráficos y determina características de m y n (si son mayores, menores o igual a cero).



Orientaciones desde la Evaluación

Para verificar estos gráficos utilice software libre Graphmate, realizando una demostración para los estudiantes, conminándoles a realizar acciones similares pero con otras funciones, en donde se pueda verificar lo planteado con ejemplos en donde No se cumple, y determinar por qué no ocurre aquello. Verifique el nivel de logro de los estudiantes mediante software libre, y en representaciones de papel milimetrado.

ACTIVIDAD DE LABORATORIO

Volumen y Altura de un recipiente

Orientaciones desde la Evaluación

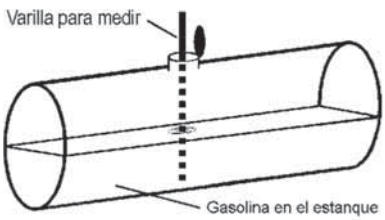
¿Cuáles son las variables involucradas en la actividad? Indicar la dependencia entre ellas, ¿Qué tipo de relación existe entre dichas variables?, Haga un bosquejo del gráfico de esta relación ¿En cualquier recipiente se obtiene igual representación gráfica? ¿De qué depende la posible diferencia?

Materiales:

- Recipientes de diferentes formas
- Regla
- Calibrado r Vernier
- Pipeta, de 10 ml
- Calculadora

Enunciado del Problema:

A menudo un estanque subterráneo de gasolina tiene la forma de un cilindro recostado. De vez en cuando es necesario medir la cantidad de gasolina restante, insertando un palo largo a través de una compuerta. En esta actividad estudiarás la relación entre la cantidad de fluido en un envase, y la profundidad del fluido en un envase con forma rara.



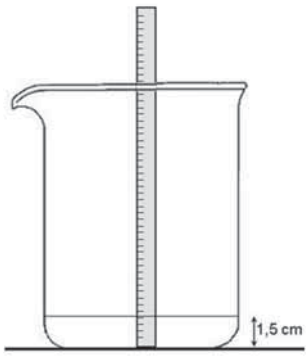
Medición de la Cantidad de Gasolina en un Estanque Subterráneo:

Procedimiento:

a) Vierta agua hasta una altura de 1,5 cm en un vaso de 400 ml. Mida y anote la altura del agua en su cuaderno. Ésta es la altura h_0.

b) Utilice la pipeta de 10 ml para agregar 20 ml de agua al vaso y anote el volumen agregado (20 ml) en el cuaderno. Mida la nueva altura, desde la misma línea de referencia usada para medir h_0, y anote la altura del agua en el cuaderno.

c) Agregue otros 20 ml de agua y anote el nuevo *volumen total* en el cuaderno. Mida y registre la altura del agua en el cuaderno.



d) Repita el Paso **c** agregando 20 ml de agua en forma sucesiva, hasta que el nivel de agua esté a 2,5 cm del borde superior del vaso.

e) Dibuje un sistema de coordenadas cartesianas. Marque la altura por el eje vertical y el volumen por el eje horizontal.

f) A partir del gráfico determine la ecuación principal de la recta. ¿Cuál es el valor de la ordenada al origen? ¿Qué representa? Mida la pendiente de la recta. ¿Qué representa la pendiente?

g) Mida el diámetro interior del vaso con el calibrador Vernier. Calcule el área de una sección del vaso. Calcule el valor de 1/m a partir del valor de m dado en la ecuación del paso f. ¿Cómo se compara esta área con el valor 1/m de la recta graficada?

h) Repita este experimento, pero ahora usando, por ejemplo, un matraz Erlenmeyer; ¿es posible establecer una relación “lineal” entre altura y volumen de este recipiente? Explique.

Referencias bibliográficas

Azcárate, C. & Deulofeu, J. (1999). Funciones y Gráficas. Editorial Síntesis, España.

Boyer, Carl. (1968). Historia de la Matemática. Madrid, España. Alianza Editorial Textos.

Chevallard, Y., Bosch, M., Gascón, J. (1997). Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. ICE-Horsori. Barcelona.

Freudenthal, H. (1982). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel.

Kline, M. (1992). Mathematical thought from ancient to moderns times. Vol. I, II, III. New York, E.U.A.: Oxford Univertity press.

Martínez, V., Sevilla, F. , Oaxaca, J. (2007). Teoría de Funciones. JIT PRESS, México.

Novelli, A. (2005). Elementos de Matemáticas. Buenos Aires. Argentina.

Spivak, M. (1970). Calculus. París. Editorial Reverté.

Zamansky, M. (1967). Introduction À l'algèbre et analyse modernes. París, Francia. Dunod Editeur.

Autores de Física

Carla Hernández Silva. Profesora de Física y Licenciada en Educación por la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Magíster en Investigación en Didáctica y Doctora en Didáctica de la Matemática y las Ciencias Experimentales por la Universidad Autónoma de Barcelona. Profesora asociada, Facultad de Ciencia, Universidad de Santiago de Chile.
E-mail: *carla_hernandez_s@yahoo.es*

Patricio Farfán Vergara. Profesor de Física y Matemáticas en ejercicio. Universidad Iberoamericana de Ciencias y Tecnología UNICIT. Integrante Laboratorio GRECIA de Investigación en Didáctica de las Ciencias. E-mail: *pfarfanvergara@gmail.com*

Manuel Ramírez Pannat. Profesor de Física y Matemática de la Universidad de Chile con estudios de Magíster en Didáctica de las Ciencias en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Docente de enseñanza media en el Saint George's College, y didáctica de las ciencias para estudiantes nóveles de pedagogía en la Universidad de Chile.
E-mail: *ramirezpanatt@ug.uchile.cl*

Yadrán Gómez Martínez. Licenciado en Educación, y Profesor de Ciencias y Física (Universidad de Concepción, 2012), lidera el Equipo Austral de Investigación en Enseñanza de la Física (U. de C.), miembro del grupo GRECIA-PUC, y actualmente es becario CONICYT para iniciar estudios de postgrado en Enseñanza de la Física y las Matemáticas en la Universidad de São Paulo, Brasil.
E-mail: *yadrangomez@udec.cl*

Sebastián Urra Orellana. Profesor de Química y Biología. Universidad de Santiago de Chile. Integrante Laboratorio de Didáctica de las Ciencias GRECIA.
E-mail: *sebastian.nejo@gmail.com*

Jorge Pinochet Iturriaga. Doctor en Ciencias de la Educación y Licenciado en Física de la Pontificia Universidad Católica de Chile. Se ha desempeñado como especialista en ciencias del SIMCE, coordinador de física del AEP (MIDE, UC), docente del programa PENTA UC, y especialista en currículum y evaluación del MINEDUC. Investigador y consultor en Psicometría y Didáctica de las Ciencias. E-mail: *japinochet@gmail.com*

Gerardo Saffer Krause. Licenciado en Educación, Profesor de Matemáticas y Física, y Diplomado en Estudios Ambientales por la Pontificia Universidad Católica de Chile. Sus principales intereses son la Didáctica de la Física y la Educación Ambiental. Actualmente se desempeña como profesor de Física y Sistemas Ambientales y Sociedades en The Mayflower School y como docente en la Universidad Católica Silva Henríquez y la Universidad Academia de Humanismo Cristiano. Además, es miembro de GRECIA y BellaTerra. E-mail: *gsaffer@uc.cl*

Bianca de Quadros Cerbaro. Licenciada em Física e bolsista de iniciação científica da Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação da Faculdade de Física da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul/Brasil (PUCRS).
E-mail: *bianca.cerbaro@acad.pucrs.br*

Valderez Marina do Rosário Lima. Licenciada em Ciências, especialista em Programas de Saúde, mestra em Educação, doutora em Educação. Professora dos cursos de Pedagogia e Mestrado em Educação em Ciências e Matemática, e Coordenadora de Ensino e Desenvolvimento Acadêmico da Pró-Reitoria de Graduação da PUCRS. E-mail: *valderez.lima@pucrs.br*

João Batista Siqueira Harres. Graduado em Física, mestre em Educação, doutor em Educação com Estágio Pós-Doutoral na Universidade de Sevilha. Professor dos Cursos de Licenciatura e Bacharelado em Física e coordenador do curso de Licenciatura em Física da PUCRS. Professor colaborador do curso de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas do Centro Universitário Univates. E-mail: *joão.harres@pucrs.br*

João Bernardes da Rocha Filho. Físico, Filósofo, Pós-Doutorado em Ensenanza de las Ciencias, Doutor em Engenharia, Mestre em Educação, Especialista em Psicossomática e Metodologia do Ensino Superior, professor titular da Faculdade de Física e do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, no Brasil. E-mail: *jbrfilho@pucrs.br*

Autores de Matemática

Edelmira Badillo Jiménez. Académica del Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales de la Universidad Autónoma de Barcelona, Doctora en Didáctica de la Matemática por la Universidad Autónoma de Barcelona. Sus líneas de investigación son: desarrollo profesional del profesor, pensamiento matemático avanzado y análisis de prácticas discursivas en el aula de primaria.
E-mail: *edelmira.badillo@uab.cat*

Horacio Solar Bezmalinovic. Académico de la Facultad de Educación de la Pontificia Universidad Católica de Chile, Doctor en Didáctica de la Matemática por la Universidad Autónoma de Barcelona. Sus líneas de investigación son: competencias matemáticas, el desarrollo de la argumentación y modelización en el aula de matemática, y la didáctica del álgebra.
E-mail: *hsolarb@gmail.com*

Francisco Rojas Sateler. Doctor en Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias Experimentales por la Universidad Autónoma de Barcelona (España). Sus líneas de investigación son: Comunicación Matemática de Aula, Formación de profesores de matemáticas y Formación inicial. Actualmente, es académico del Departamento de Didáctica de la Facultad de Educación de la Pontificia Universidad Católica de Chile. E-mail: *frojass@uc.cl*

Pilar Peña Rincón. Profesora de Matemática e Informática Educativa en la Universidad Católica Silva Henríquez en Chile. Magíster en Ciencias en Matemática Educativa por el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional de México (CICATA-IPN). Candidata a Doctora en Matemática Educativa en la misma institución, con el

proyecto de investigación titulado *Flexibilización de currículos de matemáticas en situaciones de interculturalidad*. Se ha desempeñado como docente de aula, como formadora de maestros en servicio, como asesora educacional y como investigadora. Consultora para el Centro de Innovación en Educación de la Fundación Chile, asesorando escuelas públicas cuyos estudiantes son mayoritariamente indígenas de origen aymara. Coordinadora del capítulo Chile de la Red Latinoamericana de Etnomatemática.
E-mail: *pilar.pena.rincon@etnomatematica.org*

Roberto Vidal Cortés. Profesor de Matemática e Informática Educacional por la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación. Magíster en Didáctica de la Matemática por la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso y Doctor en Ciencias de la Educación, en el área de la Didáctica de la Matemática por la Pontificia Universidad Católica de Chile. Actualmente es Director de la carrera de Pedagogía en Matemática y del programa de Magíster en Didáctica de la Matemática de la Universidad Alberto Hurtado. E-mail: *rvidal@uahurtado.cl*

Jorge Neira Silva. Profesor de Matemática y Física, Universidad de Santiago de Chile. Magíster © en Didáctica de la Matemática Universidad Alberto Hurtado y Magíster en Currículum y Evaluación USACH. Actualmente se desempeña como Académico de la Escuela de Educación de la Facultad de Educación de la Universidad Alberto Hurtado en las carreras de Pedagogía en Matemática y Educación Básica. E-mail: *jneira@uahurtado.cl*

Nelson Valenzuela Valenzuela. Profesor de Educación General Básica de la Universidad Católica del Norte, Profesor de Física y Química y Magíster en Pedagogía de la Universidad Alberto Hurtado. Actualmente se desempeña como Académico de la Escuela de Educación de la Facultad de Educación de la Universidad Alberto Hurtado en las carreras de Pedagogía en Matemática, Educación Básica, Educación Parvularia y Pedagogía en Inglés. E-mail: *nvalenzu@uahurtado.cl*

Este libro es un aporte discreto y teóricamente fundamentado para contribuir a mejorar la calidad de nuestras clases de Física y Matemática en la Enseñanza Media, con algunas ideas innovadoras que favorezcan tanto la enseñanza como los aprendizajes de algunas nociones científicas esenciales en este campo de conocimiento. De tal forma que, tanto estudiantes como profesores, aprendan tanto de conocimientos sobre la ciencia como de actitudes científicas o hacia las ciencias, potenciando sus estrategias intelectuales, habilidades cognitivas, competencias comunicacionales y discursivas. Para ello, se requiere, por cierto, 'adoptar' curricular y culturalmente una noción acerca de la naturaleza de la ciencia (NOS) y de enseñanza de la Física y la Matemática que se conecte inteligentemente con los valores y la cultura de nuestra época, sus problemas e incertidumbres.

Este libro quiere ser una nueva mirada 'del discurso científico escolar'. La **N**ueva **E**nseñanza de las **C**iencias (NEC) pretende contribuir a interpretar el mundo con teoría, particularmente 'desarrollar el pensamiento con aprendizajes de nivel superior', atendiendo a la heterogeneidad y diversidad de nuestras aulas. Eso requiere un nuevo profesional docente y reclama, entre otras dimensiones, innovar en la toma de decisiones del aula cuando se ha de enseñar a 'pensar con teoría' los hechos del mundo. Los nuevos profesores de Física y Matemática han de saber seleccionar y organizar los conocimientos de las ciencias adecuados a las nuevas audiencias: los ciudadanos y ciudadanas del siglo XXI; y han de tener una actitud abierta a la investigación en diversos campos de la ciencia y un conocimiento avanzado en las nuevas tecnologías. Ojalá que este libro pueda contribuir, en parte, a este enorme desafío político y profesional, tarea que no comienza ni termina con una ecuación o definición de partícula. (MQ/IK).

ISBN: 978-956-353-765-9

View publication stats